Matematikkens udvikling op til renæssancen

skitse med pointer

Niss, Mogens Allan

TEKST NR 115 1985

MATEMATIKKENS UDVIKLING
-OP TIL RENÆSSANCEN
skitse med pointer

Mogens Niss

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

Abstract

Den foreliggende tekst giver en skitse af udviklingen af matematikken fra de ældste orientalske højkulturer (i Mesopotamien, Ægypten, Indien og Kina), over den klassiske og den hellenistiske periode i antikkens Grækenland, op til den kinesiske, den indiske og den islamiske matematik i middelalderen. Fremstillingen standser lige før nybruddet i Europa tager fart i 12-13oo-tallet med opdagelsen af den islamisk-arabiske matematik og derigennem den klassiske græske matematik.

Hensigten er at søge svar på spørgsmålet om matematikkens forhold til samfundet: Hvilke samfundsmaterielle, kulturelle og andre kræfter skaber og driver matematisk virksomhed og matematisk udvikling? Og omvendt: Hvilken rolle spiller matematisk virksomhed og matematiske resultater for samfundenes liv?

Det er ikke tanken at teksten skal stå alene. Den udgør et kapitel i en bog, "Om matematik", som er under udarbejdelse. Når jeg vælger at udsende kapitlet separat i denne form er det for at kunne få reaktioner på det i den trods alt afrundede skikkelse det har fået, men også fordi det måske kan bruges som oversigt til undervisningsformål over karakteren og udviklingen af matematikken i oldtids- og middelalderkulturerne.

INDHOLD

Institut for Matematisk Statistik
Københavns Universitet

11. oktober 1985

TT/UH

Klip fra

Meddelelser fra Københavns Universitet

13. november 1960:

INSTITUT FOR MATEMATISK STATISTIK

Konsistorium har i sit møde den 2. november 1960 tiltrådt det matematisk-naturvidenskabelige fakultets indstilling om benævnelsen af det nye institut under professoratet i matematisk statistik som „Københavns universitets institut for matematisk statistik" (j. nr. 485/58).

I anledning af instituttets 25 års fødselsdag vil det glæde os at se dig til en uhøjtidelig reception

fredag den 1. november kl. 15-17

i Matematisk Centralinstituts frokoststue, lokale S 15 i H.C. Ørsted Institutets E-bygning.

På instituttets vegne

Tue Tjur

Tue Tjur

FORORD

Det er egentlig ikke tanken at den foreliggende tekst skal stå alene. Den udgør et kapitel i en bog "Om matematik" som er under udarbejdelse. Når jeg vælger at udsende kapitlet separat som IMFUFA-tekst er det dels for at kunne få reaktioner på det i den trods alt afrundede form det har fået, dels fordi det måske kan bruges som oversigt til undervisningsformål over karakteren og udviklingen af matematikken i oldtids- og middelalderkulturerne.

Hensigten med kapitlet er at søge svar på spørgsmålet om matematikkens forhold til samfundet: Hvilke samfundsmaterielle og kulturelle og andre kræfter skaber og driver matematisk virksomhed og matematisk udvikling? Og omvendt: Hvilken rolle spiller matematisk virksomhed og matematiske resultater for samfundenes liv? Dybest set er jeg interesseret i disse spørgsmål især over for vor tids matematik - fordi afgørelser om uddannelses- og undervisningspolitik, forskningspolitik og teknologipolitik, og dermed i sidste instans afgørelser af betydning for den demokratiske udvikling i samfundet, påvirkes af matematikkens stilling i det. Men forudsætningerne for tilstandene i vor tid er i så høj grad skabt i fortiden, i særdeleshed når det gælder matematik. Derfor må man gå historisk til værks. Endvidere er samspillet mellem matematik og samfund - skønt indviklet nok - trods alt mere overskueligt i tidligere historiske perioder, først og fremmest fordi matematikken da var af langt mindre omfang, kompleksitet og rækkevidde end i dag. Det bevirker at nogle af de træk ved matematikkens stilling i verden i dag som kan være vanskelige at grave ud af virvaret kan findes i mere ren og enkel form i fortiden.

Når det gælder de <u>faktuelle</u> sider af det materiale der her fremlægges, har jeg ikke meget originalt at bidrage med. Fremstillingen er bygget på læsning af et antal matematikhistoriske værker, sammenfattende monografier såvel som tekster om enkeltemner, og nu og da også på kildestudier. I udvalget og præsentationen af stoffet ligger naturligvis altid en selvstændig indsats, men hvis kapitlet har noget nyt at bringe ligger det snarere i <u>fortolkningen</u> af stoffet og i <u>besvarelsen</u> af de hovedspørgsmål der blev nævnt ovenfor. I øvrigt er det ikke så vigtigt for mig at fortolkningen og svarene er originale som at de er rigtige. Det håber jeg at finde ud af gennem de reaktioner, der måtte indløbe på den foreliggende tekst.

Mogens Niss, oktober 1985

MATEMATIKKEN I ORIENTENS OLDTIDSKULTURER

INDLEDNING

Af gode grunde har vi ikke mange vidnesbyrd om matematikken (forstået helt bredt) i uddøde kulturer som ikke har efterladt sig skriftligt materiale med et matematisk indhold. I lande som Kina og Indien har man først sådanne vidnesbyrd fra omkring 5oo-6oo f.v.t. Men at der alligevel, selv om vi ikke ved noget præcist om det, har fandtes i det mindste primitive udgaver af matematik meget tidligt i menneskehedens historie er der enighed om. Simple tælleoperationer og simple additioner af tal må have forekommet meget tidligt; f.eks. ved tælling af kvæg, mennesker osv. Talbegrebet har måske nok været primitivt, f.eks. kun omfattende få talnavne. Talsystemerne har varieret fra samfund til samfund. Man kender 2-tals, 5-tals, 1o-tals, 2o-tals og 6o-talssystemer i brug i primitive og tidlige kulturer. Også målinger af afstande, fladeindhold og rumindhold har der meget tidligt været brug for, f.eks. til husbygning, agerdyrkning, opkrævning af jordskatter, ved vævning m.v. Ligeledes en eller anden udgave af tidsmåling, både i det store og i det små, må tidligt have forekommet. Geometriske objekter, såsom figurer, former, vinkler, flader osv. har været kendt i tilknytning til bl.a. hus- og skibsbyggeri, markafgrænsning, keramik m.m. Muligvis har der ikke i ret mange samfund været nogen teori til at behandle disse objekter med, men at de har indgået i verdensbilledet kan vi tage for givet.

Skriftlige kilder har vi til den ægyptiske og navnlig den mesopotamiske matematik i oldtiden. Kilderne har naturligvis karakter af udpluk, derved at de er knyttet til tilfældigvis overleverede materialer. Det billede af matematikken i disse samfund vi får deraf bliver således fuldt af huller, og det kræver mange tolkninger at komme til klarhed over indholdet i det man har fundet.

ÆGYPTISK MATEMATIK

Vores kendskab til ægyptisk matematik i oldtiden skriver sig hovedsagelig fra fem papyri, hvoraf især den såkaldte Rhind-papyrus og den såkaldte Moskva-papyrus, begge fra omkring 17oo f.v.t., er de mest indholdsrige.

Disse papyri omfatter forskellige regneopgaver formuleret i ord, uden brug af andre symboler end talsymboler. Det billede af ægyptisk matematik der ud fra kilderne fremstår for os, viser at hovedinteressen for den var at løse praktiske optællings-, regne- og måleproblemer af den slags som opstod i tilknytning til dagligdagens gøremål, såsom beregning af markskatter (en sag med komplikationer p.g.a. Nilens årlige oversvømmelser af markerne), byggeri, tidsmåling m.m. Disse opgaver lå i hænderne på en særligt uddannet og magtfuld stand af skrivere. Nogle af regneopgaverne bærer præg af at være for så vidt urealistiske øvelsesopgaver, der først og fremmest skal tjene til at vise teknikken i opgaveløsningen. Det kunne tyde på en vis selvstændiggørelse af matematikundervisningen i de særlige skriverskoler. F.eks. skal i en opgave loo brød deles blandt 5 mand, så at deres andele vokser med det samme tal, og så at de tre største andele til sammen er syv gange summen af de to mindste andele. (Der er her essentielt tale om to ligninger med to ubekendte).

Ægypterne arbejdede med naturlige tal (1,2,3 osv.) og brøker. De naturlige tal var opbygget i et lo-talssystem, men blev ikke noteret positionelt, dvs. i et system hvor pladsen for et taltegn bestemmer hvilken lo-potens (én, ti, hundrede o.s.f.) der angives af taltegnet, og hvor det er de samme taltegn der kan benyttes på enhver plads. Hos ægypterne havde de forskellige lo-potenser (enerne, tierne, hundrederne osv.) forskellige tegn, uden fælles byggesten. Når det gælder brøker, blev brøker med tælleren 1, de såkaldte stambrøker, betragtet som de grundlæggende, svarende til at en enhed deles i et antal lige store dele. Andre brøker blev så opbygget som summer af stambrøker, f.eks. $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$. I Rhind-papyrus'en er opstillet en hel tabel over spaltninger af brøker af formen $\frac{2}{n}$ for ulige n fra 5 til lol. Opstillingen af en sådan tabel forudsætter for så vidt en egentlig matematisk forskningsindsats (selv om den kan forekomme os elementær), men hensigten med den har været at skabe et hjælpemiddel til praktisk brug.

lo-potenser og brøker i hieroglyfskrift

1 lo loo looo ...

2341 = 

(man skrev fra højre mod venstre).
Brøker dannedes ved at anbringe tegnet  over tallet:

 $= \frac{1}{3}$,  $= \frac{1}{10}$

Alle fire regningsarter var til rådighed for ægypterne, men addition blev betragtet som den fundamentale. Multiplikation blev udført ved gentagen fordobling. Man fandt f.eks. 9·13 således:

$1\cdot 13 = 13,\ 2\cdot 13 = 26,\ 4\cdot 13 = 52,\ 8\cdot 13 = 104,$

altså er $9\cdot 13 = 1\cdot 13 + 8\cdot 13 = 13 + 104 = 117$. Også subtraktion og division blev ført tilbage til addition.

Visse simple ligninger af første grad med én ubekendt (den ubekendte blev kaldt en "dynge") er omtalt i de bevarede papyri. Areal- og volumenberegninger vedrørende nogle geometriske figurer og legemer har været udført. For cirklens areal benyttede man følgende udtryk: (diameter $- \frac{1}{9}$ diameter)^2, altså i symbolsprog $(\frac{8}{9}\,d)^2 = \frac{256}{81}\,r^2$, hvilket svarer til en tilnærmelse af π med værdien $\frac{256}{81} \sim 3.160$.

Skønt ægypternes interesse i matematik havde et udpræget praktisk sigte, førte selve dette sigte, som det foregående antyder, til en behandling af problemer med et vist, ganske vist beskedent, teoretisk præg. En egentlig teoretisk interesse i matematik havde ægypterne efter alt hvad vi ved ikke.

MESOPOTAMISK MATEMATIK

Hvor vi om ægyptisk matematik kun ved relativt lidt, p.g.a. kildernes sparsomhed, har vi om den mesopotamiske matematik, altså matematikken i det område omkring floderne Eufrat og Tigris, der også ofte kaldes Babylonien efter det navn områdets riger havde i over 1ooo år, en betydeligt større viden. Det skyldes at den mesopotamiske matematik er overleveret på brændte lertavler beskrevet hovedsagelig med kileskrifttekster. Sådanne lertavler er langt mere holdbare end papyri, der nedbrydes med tiden. Flere hundrede lertavler med et matematisk indhold er blevet tydet, bearbejdet og oversat til moderne sprog, men flere tusinde ligger endnu ubehandlede hen. Desuden finder man jævnligt nye lertavler gennem udgravninger. I fremtiden vil vi derfor komme til at vide mere om mesopotamisk matematik end vi ved nu, og måske få besvaret nogle af de åbne spørgsmål som det hidtil kendte materiale giver anledning til.

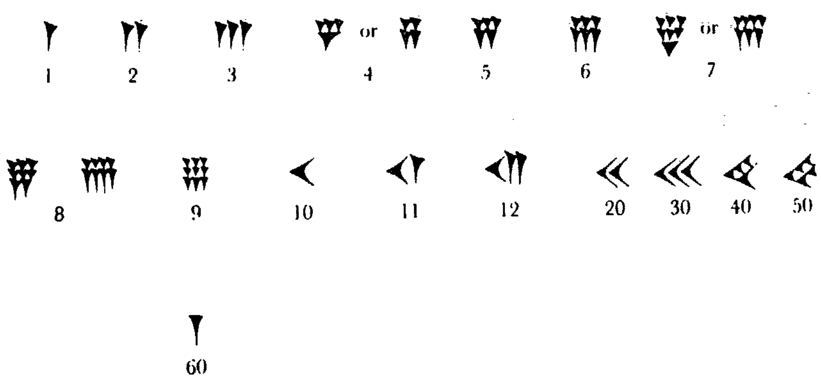
Men allerede fra de kilder der er til rådighed fremstår den mesopotamiske matematik som påfaldende mere righoldig og avanceret end den ægyptiske. Endvidere kan man se at den - til forskel fra den ægyptiske, der blev til og udfoldedes i et befolkningsmæssigt ensartet og politisk ret stabilt samfund - har gennemløbet en udvikling. Begyndelsen går tilbage til <u>sumerisk</u> tid, omkring 3ooo-23oo f.v.t. Fortsættelsen følger i den <u>oldbabylonske</u> periode i tiden 18oo-15oo f.v.t., en periode hvorfra der kendes særligt mange tekster, over den <u>assyriske</u> periode 8oo-6oo f.v.t., videre til den <u>persiske</u> og siden den græsk påvirkede <u>seleukide</u>-periode, fra omkring 6oo f.v.t. til vor tidsregnings begyndelse. Fra disse sidste perioder kendes den anden store gruppe af tekster med mesopotamisk matematik.

I disse to-tretusinde år sker der en række befolkningsmæssige, politiske, sociale og teknologiske forandringer som kraftigt omdanner områdets samfund. Alligevel er der kontinuitet i udviklingen af matematikken, antagelig fordi dens udøvelse foregik relativt afsondret fra de ydre omvæltninger. I begyndelsen var udviklingen i hænderne på en religiøs og administrativ overklasse af præster/skrivere. Siden blev den videreført i mere verdslige offentlige og private administrations- og handelsinstitutioner. I hele tidsrummet spillede organiserede skriverskoler, som i Ægypten, en dominerende rolle for matematikkens formidling og videreudbygning.

De ældste tekster med et matematisk indhold stammer fra de sumeriske stramt religiøst styrede bystater og indeholder lageroversigter og simple opgørelser over diverse produkter som f.eks. fisk og kvæg. I de første mange århundreder dominere-des de matematiske tekster i det hele taget af beregningsopgaver af økonomisk-praktisk oprindelse, såsom varemængde-beregninger, renteopgaver (med rentes rente), overslag over arbejdskraft- og arbejdstidsforbrug ved bygge- og anlægsarbejder, f.eks. ved kanalbygning. Desuden kornfordelingsopgaver, arvespørgsmål med meget mere. De mesopotamiske samfund var agerbrugssamfund med kunstig overrisling af de frugtbare marker som en central forudsætning for udbyttet. International handel stødte til, idet det mesopotamiske område lå i krydset mellem handelsvejene til og fra alle verdenshjørner. I de senere babylonske og assyriske perioder og især i seleukidetiden finder vi en stærk vækst af astronomiske beregningsopgaver. De angår planetbevægelser, astrologi og kalenderkonstruktion. En hovedinteresse i den forbindelse var forudsigelser af astronomiske begivenheder, bl.a. sol- og måneformørkelser der tillagdes religiøs betydning.

Som i Ægypten havde matematikken altså også i Mesopotamiens skiftende kulturer sin oprindelse i og nære tilknytning til behov i samfundets liv. Men af forskellige grunde lykkedes det mesopotamerne til tacklingen af de praktiske problemer at bringe matematikken meget videre end ægypterne gjorde det stort set samtidig. Selv om de to kulturer stod i god handelsmæssig forbindelse med hinanden ser der ikke ud til at være foregået nogen udveksling af matematiske idéer før i de sidste århundreder f.v.t. I endnu højere grad end hos ægypterne skete der i Mesopotamien en delvis selvstændiggørelse af mange matematiske problemstillinger, som så småt fik deres eget liv, men altså endnu med kort snor til praktiske anliggender.

En af de vigtigste grunde til at matematikken i Mesopotamien nåede så langt var indførelsen allerede i sumerisk tid af et positionssystem for tallene. Hvor ægypterne benyttede et ikke-positionelt talsystem med lo som grundtal, blev mesopotamernes talsystem allerede i sumerisk tid et 6o-talssystem (helt i begyndelsen var det et lo-talssystem som det ægyptiske), men altså noteret positionelt. Det vil sige at det ikke blot var det enkelte taltegns udseende men også dets placering i forhold til de andre taltegn der afgjorde dets værdi. I vores lo-talssystem, der jo også er positionelt, afgøres det af pladsen om et tal angiver enere, tiere, hundreder osv. I lo-talssystemet kræves 9 ciffertegn samt o. I 6o-talssystemets kræves 59 ciffertegn samt o. Et o havde men imidlertid ikke hos mesopotamerne, bortset fra i den seneste periode, hvor man havde et særligt tegn til at angive tomme pladser mellem andre tegn, men ikke noget til at angive tomme pladser i halen af tallene. De 59 ciffertegn så i kileskrift sådan ud (læg mærke til at tegnene er opbygget af to deltegn, ét for 1 og ét for lo, en reminiscens af de oprindelige lo-talssystem):



I denne notation ser f.eks. 34 således ud: .

Med disse tegn som byggesten dannedes nu tallene i positionssystemet med 6o som grundtal ved at et taltegns placering afgør om det skal angive antal enere, antal 6o'ere, antal $6o^2$-ere (36oo-ere) osv. F.eks. blev tallet 71 noteret således:

(1 på "6o-pladsen" og 11 på "1-pladsen").

Manglen på et nul og manglen på angivelsen af en "absolut plads" (pladsen lige inden kommaet i vort system) gav imidlertid anledning til flertydigheder. F.eks. blev tallet 426o = $6o^2 + 11 \cdot 6o$ også noteret som , altså ikke til at skelne fra 71. Havde man haft et tegn for o kunne flertydigheden have været fjernet ved for 426o at skrive  "o". Men det forholdt sig værre endnu, for mesopotamerne regnede også med brøker i 6o-talssystemet, dvs. med $\frac{1}{6o}$, $\frac{1}{36oo}$ o.s.f. som brøkenheder. De noterede dem ved hjælp af de hele tal, ligesom vi noterer decimalbrøker som o.l, o.ol osv., men altså uden noget nul og uden noget komma. Derfor kunne 𒁹𒌋𒁹 ud over det allerede nævnte også betyde $\frac{1}{6o} + 11\cdot\frac{1}{36oo}$, eller $1 + 11\cdot\frac{1}{6o}$, eller for den sags skyld $\frac{1}{36oo} + 11\cdot\frac{1}{216ooo}$. Denne flertydighed gjorde at man af sammenhængen måtte slutte hvilke 6o-potenser der lå bag, ud fra om regningerne vedrørte manskabsangivelser, markstørrelser eller sølvmængder.

Koblingen mellem positionsidéen og brugen af 6o som grundtal også til brøker, kaldes sædvanligvis <u>sexagesimalsystemet</u>, ligesom vores system kaldes decimalsystemet. Vi ved ikke nøjsgtigt hvad der er oprindelsen til indførelsen af et positionssystem og af 6o som grundtal. Man regner med at 6o blev valgt som grundtal fordi forskellige, førhen adskilte, enhedssystemer for mål og vægt skulle harmoniseres engang i sumerisk tid. Og til den ende er 6o, der har særligt mange divisorer (1,2,3,4,5,6,1o, 12,15,2o,3o,6o) en bekvem enhed at opdele i forskellige underenheder. Oprindelsen til positionsidéen tilskrives normalt at der blev regnet i mål- og vægtenheder af forskellig størrelse, som vi angiver priser i kroner og ører. I stedet for så at skrive 1o "kroner" og 25 "øre", har man først udeladt "kroner" og "øre" og nøjedes med at skrive først "krone"-beløbet og derefter "øre"-beløbet, men samtidig skrevet antallet af store enheder med en stor kilepen, antallet af små med en lille, svarende til prisskilte som 1o^{25} hos os. Efterhånden er man holdt op med at gøre forskel på tegnstørrelsen, og har ladet det tal som nævntes først vedrøre den største enhed, det næste den næststørste og så fremdeles. Rester af 6o-talssystemet findes endnu i vor tid, bl.a. i opdelingen af en time i 6o minutter og et minut i 6o sekunder, svarende til at en time er lig 36oo sekunder.

På trods af at der med vore øjne er ufuldkommenheder i det mesopotamiske sexagesimalsystem, repræsenterede det et umådeligt vigtigt skridt hen i mod ikke bare et håndterligt talbegreb, men også mod en brugbar regnekunst, algebra. Af forskellige grunde blev systemet stort set ikke overtaget og videreført af de europæiske kulturer, den græske og siden den romerske, der overtog arven efter den mesopotamiske. I Europa blev tråden først taget op igen i middelalderen under indflydelse fra araberne, der igen var påvirket af indernes matematik. Det var positionssystemet der gjorde det muligt for mesopotamerne at løse mere komplicerede matematiske opgaver end ægypterne. F.eks. regner man jo i sexagesimalsystemet, som i decimalsystemet, med brøker ved at regne med hele tal, for først til sidst at bekymre sig om kommaet (hvilket sidste altså mesopotamerne overlod til sammenhængen). Her var ægypterne henvist til deres meget mere besværlige spaltning af brøker i stambrøker.

Hvad var det så for en slags matematik mesopotamerne fik ud af deres interesse for økonomiske og siden også astronomiske problemstillinger? En del af de matematiske tekster, hvoraf mange sikkert var skoletekster, består af opgaver formuleret i ord, som hos ægypterne, suppleret med løsninger på receptform. Alle recepter gives ved hjælp af taleksempler; nu og da kan man se at metoden fremtræder som mere generel, f.eks. når der er løst mange opgaver af samme type. Ofte er metoderne korrekte, også efter moderne målestok. Men der findes ingen angivelser af hvordan man er nået frem til løsningsrecepterne. Det gør det svært at lodde dybden af mesopotamernes indsigt i de metoder de har benyttet, hvilket har givet og fortsat giver anledning til fortolkningsstridigheder blandt de lærde om karakteren af mesopotamernes matematikforståelse.

Mange opgaver vedrører beregninger i tilknytning til jordstykker, varebeholdere, magasiner, byggeri og lignende, og de indeholder ofte geometrisk farvede ord som "længde", "bredde", "højde", "areal", "rumfang". Men dette skyldes ikke at hensigten var at afdække egenskaber ved geometriske figurer som sådan. Ordene kommer nærmest til at stå som navne for ubekendte i almindelighed, "længde" og "bredde" for x og y, "areal" for xy. Dette antydes f.eks. af at man uden videre har lagt "længde"r og "areal"er sammen. Men selv om opgaveinteressen ikke var rettet mod selve det geometriske indhold, er det ikke umuligt at mesopotamerne har støttet sig på geometriske figurer i udviklingen af deres løsningsmetoder. Terminologi og beregningsrækkefølge i visse tekster kan antyde noget i den retning. I øvrigt var mesopotamerne ingenlunde ukendte med diverse størrelser, f.eks. arealer, hørende til geometriske figurer. Men de har især været at betragte som relevante for opmålingsformål. Hvad de astronomiske beregninger angår har de vedrørt de synlige himmelfænomener, og har næppe bygget på bagvedliggende geometriske modeller af himmellegemernes bevægelser.

Med det apparat mesopotamerne havde til rådighed nåede de i algebraisk henseende temmelig langt. De kunne løse enhver andengradsligning med positive reelle rødder tilnærmelsesvis korrekt. Andengradsligninger opstod i forbindelse med handelsregning. Desuden kunne de føre en række andre ligninger, bl.a. par af ligninger (også ikke-lineære) med to ubekendte tilbage til løsningen af en andengradsligning. De kunne løse visse tredje- og fjerdegradsligninger, finde summer af forskellige talrækker (f.eks. $1+2^2+2^3+\ldots+2^9$), hvilket spillede en rolle for deres astronomiske beregninger. De havde metoder til at uddrage kvadratrødder med tilnærmelse. Blandt andet havde de en forbløffende god tilnærmelse til $\sqrt{2}$, uden at de dog var klar over at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal, dvs. et brøktal. De fandt et stort antal såkaldte pythagoræiske taltripler, dvs. talsæt (x,y,z) hvor $x^2+y^2 = z^2$, endda ved benyttelse af den også i dag gængse metode. Der er desuden vidnesbyrd om at de har kendt den pythagoræiske læresætning for retvinklede trekanter.

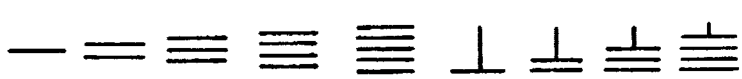
Mange matematiske tekster udgøres af tabeller. I 6o-talssystemet er de lille tabel stor. Den indeholder 177o produkter mod 45 i lo-talssystemets lille tabel. Enhver der var beskæftiget med matematik måtte derfor have adgang til en sådan tabel. Men også andre slags tabeller kendes. F.eks. udførtes division med tal ved at gange med dets reciprokke, og den reciprokke fandt man i særlige reciproktabeller. Også over tal af formen n^2+n^3 har man fundet en tabel. Sådanne tabeller har været benyttet til at finde løsninger på forskellige ligningsproblemer. Man har simpelthen søgt løsningen i en tabel svarende til problemet, og hvis den ikke stod der har man tilnærmet med værdier mellem de nærmeste (lineær interpolation). På den måde har man f.eks. søgt at løse renteproblemer med ukendt løbetid, dvs. essentielt eksponentielle ligninger af formen $a^x = b$. En særlig vidtstrakt brug af tabeller fandt sted ved behandlingen af de astronomiske beregningsopgaver fra den yngre periode.

Selv om den mesopotamiske matematik nåede temmelig langt må vi tro at mange af metoderne blev udviklet ved prøven-sig-frem og på basis af indsamlede erfaringer. Om matematiske slutninger i nyere forstand og om matematisk bevisførelse har der næppe været tale. Heller ikke mesopotamerne havde altså en udviklet interesse i matematikken som teoretisk system, for dettes egen skyld. Den tætte forbindelse til praksis er utvivlsomt årsagen til dette. Af disse grunde kaldes den mesopotamiske matematik af flere forfattere for førvidenskabelig. Men det er den kun anskuet med senere tiders bagklogskab.

KINESISK MATEMATIK

Om kinesisk matematik i oldtiden ved vi noget, men det er ofte svært at afgøre nøjagtigt hvilken periode vores viden vedrører. Det skyldes dels at kineserne skrev på forgængeligt materiale, dels en tradition for at gamle værker gang på gang blev genudgivet med nye kommentarer, men med tidligere kommentarer som en del af teksten. Den enkelte tekst indeholder derved mange lag af forskellig alder, hvis datering kan frembyde vanskeligheder.

Spredte vidnesbyrd om talsystemer, kaldendervæsen og en dertil fornøden regnekunst dateres til 15oo-1ooo f.v.t. Vedligeholdelsen af en brugbar kalender, som havde betydning bl.a. på grund af landbrugets afhængighed af årstidernes skiften, var tidligt en vigtig opgave for det centrale regeringsapparat. En systematisk regneundervisning for (nogle) børn fandt allerede sted før 3oo f.v.t. De ældste kinesiske taltegn der kendes findes indgraveret i nogle såkaldte orakelben, i mønter og i diverse husgeråd, og går tilbage til den tidligste periode, 14oo-11oo f.v.t. Disse tegn udvikledes i de følgende århundreder til de såkaldte <u>stavcifre</u>, som vi skal opholde os lidt ved. Man regner med at de var i almindelig brug i videnskabelig litteratur i hvert fald fra det 3. årh. f.v.t. Stavcifrene havde denne udformning



Det ses for det første at de to rækker taltegn er næsten ens, men den første række "ligger ned", mens den anden "står op". Det bemærkelsesværdige er nu, at med disse ni, eller om man vil atten, taltegn opbyggede kineserne senest omkring 3oo f.v.t. et <u>positionelt lo-talssystem</u>. Man havde ikke noget tegn for nul, men holdt en plads tom. De liggende tegn blev benyttet på pladserne for enere, hundreder, titusinder osv., de stående for tiere, tusinder, hundredetusinder o.s.f. F.eks. blev tallet 7619 noteret

Et andet bemærkelsesværdigt træk ved dette talsystem var dets nære familjeskab med et gammelt regnebrætsystem. På dette regnebræt blev tal noteret og regninger udført ved anvendelsen af små <u>regne-stave</u>, f.eks. lavet af bambus, metal eller elfenben. Ethvert ciffer fra 1 til 9 kunne, som det også fremgår af figuren ovenfor, komponeres af højst fem stave. Nogle ser heri en rest af et ældre femtalssystem. Ved hjælp af ret få stave kunne selv store tal lægges op. Antagelig er det den tætte forbindelse mellem de skrevne tal og tal lagt op med stave der har ført til at det førstnævnte opererer med to rækker af ciffertegn for de samme tal. Ved i oplægningen af stavene at dreje hvert andet ciffertegn formindskedes faren for at sammenblande stave fra nabotegn. Ved regning med stave var der ikke brug for et tegn for nul, fordi man simpelthen lod en plads stå tom, hvis der ikke var noget bidrag fra den dertil svarende lo-potens. Man har ment at dette har udskudt indførelsen af et nultegn i Kina, som ellers fik et sådant senest samtidig med inderne, altså i det 8 årh. e.v.t. Det er et uafklaret spørgsmål om nultegnet fremkom uafhængigt i de to kulturer, eller om den ene påvirkede den anden.

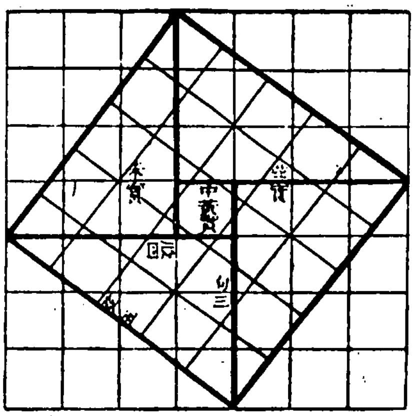
Til konkrete regneopgaver benyttede man regnestavene, og efter alt at dømme ikke regning med skrevne tal. Regning med skrevne tal findes dog i bøger af videnskabeligt eller undervisningsmæssigt indhold. Regeringsembedsmænd havde altid en pose regnestave inden for rækkevidde. Ikke bare de sædvanlige regningsarter, men også roduddragning og løsning af visse ligninger lod sig udføre med regnestave.

I tekster som ikke specifikt handlede om videnskabelige eller matematiske emner benyttedes et andet taltegnssystem, de gamle såkaldte hieroglyfcifre, af udseende som sædvanlige kinesiske skrifttegn. De brugtes (og bruges stadig) hvor der i en eller anden sammenhæng blot er tale om at gengive talstørrelser, uden at disse skal indgå i egentlige regninger. Systemet var en særlig, næsten-positionel afart af lo-talssystemet. Også hieroglyfskriften havde ni cifre, men derudover særlige tegn til at angive de forskellige lo-potenser. En sammenligning kan illustrere princippet. Hvis vi med tegnet "e" angiver enere, med "t" tiere, "h" og "tu" henholdsvis hundreder og tusinder, kunne f.eks. tallet 4879 noteres 4tu8h7t9e, jfr. den nedenstående figur. Tegnene for lo-potenserne var altså ikke egentlige taltegn, men snarere pladsnavne.

4	Th	8	H	7	T	9
四	千	八	百	七	十	九
szu	CH'IEN	pa	PAI	ch'i	SHIH	chiu

Ud over med hele tal beskæftigede kineserne sig tidligt med brøker. De blev benævnt og opfattet som hos os: m n'te-dele for $\frac{m}{n}$. For opgaver som forkortning (der gik for sig ved at finde største fælles divisor efter den metode der hedder Euklid's algoritme, jfr. omtalen af græsk matematik i et senere afsnit), sætten på fælles brøkstreg, multiplikation og division, fandtes regler formuleret i ord, de samme som benyttes i dag. Reglen om at division med en brøk sker ved at gange med den omvendte formuleredes tidligst af kineserne. Et positionelt decimalbrøksystem baseret på måleenheder, der var inddelt i tiendedele, der igen var inddelt i tiendedele, osv., var også i brug i den tidlige periode. Decimalbrøkerne fik dog, i modsætning til de hele tal, først karakter af selvstændigt eksisterende "abstrakte" tal meget senere. Det kinesiske talsystem et det ældste kendte positionelle lo-talssystem.

Af overleverede egentligt matematiske tekster fra det gamle Kina antages "Den aritmetiske klassiker om solursviseren og himlens cirkulære baner" (Chou Pei Suan Ching) at være den ældste, nemlig fra omkring 3oo f.v.t., selv om der er problemer med og uenighed om dateringen. Den indeholder noget stof om retvinklede trekanter, bl.a. en verbal formulering af den pythagoræiske læresætning og et "empirisk bevis" for den:



Desuden afsnit om kalendere og astronomi, noget om cirkler og kvadrater, samt brøkregning og roduddragning, også dette i verbale formuleringer.

Kinas mest indflydelsesrige og berømte, og igennem tiderne adskillige gange afskrevne og kommenterede, klassiske matematiktekst er imidlertid "Ni kapitler om den matematiske kunst" (Chiu Chang Suan Ching), der sædvanligvis henregnes til omkring 25o f.v.t. Skønt næsten samtidig med "Den aritmetiske klassiker ..."er "Ni kapitler..." dels mere omfattende og dels mere avanceret end denne. Det antages at den leverer en sammenfatning af de foregående århundreders matematiske indsigt. Den ældste overleverede version af de "Ni kapitler..." skyldes kommentatoren Liu Hui og stammer fra omkring 25o e.v.t. I følge Liu Hui var en af de tidligere forfattere højtstående finansembedsmand og en tid førsteminister. "Ni kapitler..." indeholder i alt 246, atter verbalt formulerede og besvarede, opgaver af forskellige slags, alle med en mere eller mindre direkte reference til praktiske foretagender, såsom landmåling, landbrug, fordelingsopgaver, arbejdskraft- og materialeberegninger (ved mur-, digeog kanalbyggeri). Desuden findes, navnlig i de senere kapitler der betragtes som de yngste, en række matematiske uddybninger af forskellige emner, bl.a. retvinklede trekanter, ligningsløsning, herunder flere ligninger med flere ubekendte (f.eks. fire ligninger med 5 ubekendte), samt andre algebraiske problemstillinger. Det er i den forbindelse bemærkelsesværdigt, at kineserne som de første i verden opererede med negative tal, undervejs i men ikke som svar på løsningen af lineære ligningssystemer, hvor de i øvrigt gik forbløffende "moderne" til værks (ved trinvis elimination udført alene på et talskema bestående af systemets koefficienter, det der nu om dage går under navnet matrixmanipulation). Ofte er der vanskeligt at trænge til bunds i hvad der menes og gøres, da der aldrig forekommer begrundelser eller bredere metodebetragtninger, men som i mesopotamisk matematik kun receptbeskrivelser.

Flere andre titler på matematiske tekster fra før vor tidsregning kendes fra Kina, men teksterne selv er gået tabt.

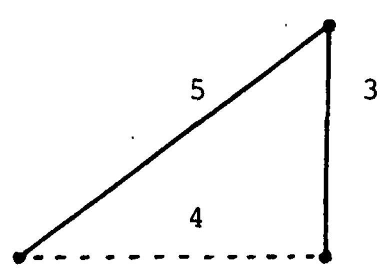
Det billede af kinesisk matematik i oldtiden der herefter fremstår for os, vidner om en matematisk kultur med samme grundpræg - og ikke mindre højtstående - end den mesopotamiske og ægyptiske. Om end en hel del yngre end den mellemøstlige matematik er den kinesiske med stor sandsynlighed udviklet uafhængigt af dnne. Kinesernes problemstillinger var nemlig tildels nogle andre, men navnlig var deres metoder forskellige fra de mellemøstlige. Med udgangspunkt i praktiske interesser for et avanceret, højt organiseret oldtidssamfund baseret på landbrug, udvikledes et spektrum af måle- og beregningsmetoder og dermed forbundne begreber, der i nogle henseender, især algebraiske, nåede meget vidt, stedvis videre end hos mesopotamerne. Som den mesopotamiske var også den kinesiske matematik i bund og grund aritmetisk/algebraisk anlagt, også når den berørte geometriske anliggender, hvor målings- og beregningsinteresser var dominerende. Også i kinesisk matematik møder vi det forhold, at skønt dybt forankret i praksis sker der her og der en selvstændiggørelse af det matematiske indhold, så det får sit eget liv. Synsvinklen skifter, så det generelle mønster i problemstillingerne og deres behandling kommer i fokus. En antydning heraf findes i en opgave, hvor en bestemt mængde skal fordeles mellem $3\frac{1}{3}$ personer. Men navlestrengen til praksis forblev altid kort.

INDISK MATEMATIK

Vi skal afslutte omtalen af matematikken i de store oldtidskulturer i orienten med et par ord om indisk matematik.

Selv om der var organisatorisk og kulturelt højtudviklede (landbrugs)samfund på det indiske subkontinent (bl.a. omkring Indusdalen) i det mindste fra omkring 25oo f.v.t., og selv om der fra disse samfund er overleveret mange tekster, vides meget lidt om indisk matematik fra før vor tidsregning. Faktisk er det eneste kendte værk fra denne tid det såkaldte Sulvasutra, der betyder snore-regler. Dets alder er omstridt. Nogle historikere henregner det til 15oo f.v.t., andre til 3oo f.v.t., men et "flertal" daterer det til perioden 7oo-5oo f.v.t. Det findes i tre varianter, alle skrevet på sanskrit og på vers.

Den centrale opgave i Sulvasutra er at angive løsningen på problemer vedrørende konstruktion af altre. Altrene skulle overholde visse forskrifter angående form eller areal. De figurer der indgik i grundplaner eller overfladestykker var kvadrater, rektangler, trapezer og cirkler. En af de opgaver Sulvasutra sætter sig er at konstruere rektangler og kvadrater. Dette forudsatte konstruktion af rette vinkler. Konstruktionerne udførtes ved hjælp af en særlig teknik med snore (deraf navnet snoreregler) og bambuspinde, og havde deres "teoretiske" grundlag i den pythagoræiske læresætning og dens omvendte. Lad os give et eksempel. På en otte enheder lang snor anbringes en knude i afstanden tre enheder fra den ene ende. Nagles nu snorens ender til jorden med bambuspinde anbragt med fire enheders afstand, og strækkes snoren ved hjælp af en bambuspind ved knuden så at snorens to dele strammes ud, fremkommer en trekant med siderne 3,4 og 5 emheder. Da $3^2+4^2 = 5^2$, er denne trekant, i følge den omvendte sætning til den pythagoræiske, retvinklet. Ved hjælp



af denne konstruktion kunne man så opbygge et rektangel med siderne 3 og 4. Også andre retvinklede trekanter, med tilhørende rektangler, konstrueredes, idet der i teksterne omtales andre pythagoræiske taltripler, nemlig (5,12,13), (8,15,17), (7,24,25) og (12,35,37). De dertil svarende trekanter blev benyttet som byggesten for andre figurer, bl.a. trapezer. Der er i øvrigt tvivl om, hvorvidt den pythagoræiske læresætning, der jo var kendt i Mesopotamien meget før 7oo-5oo f.v.t., er en selvstændig indisk opdagelse, eller om den er importeret fra mesopotamerne med hvem inderne stod i handelsforbindelse.

Pythagoras' sætning blev også brugt til at løse et andet alterbygningsproblem: ud fra et givet kvadrat at konstruere ét hvis areal er et bestemt antal gange så stort. Når dette antal er 2, får man det søgte kvadrat ved at benytte diagonalen i det oprindelige som side i det nye. Til en tredobling skulle man som side blot benytte hypotenusen i en retvinklet trekant, hvis kateter var henholdsvis siden i det oprindelige kvadrat og siden i det fordoblede kvadrat. Således kunne man fortsætte. På lignende måde kunne man gennemføre andre konstruktioner, også nogle som er temmelig indviklede, som f.eks. ud fra et givet rektangel at konstruere et kvadrat med samme areal.

I en af tekstvarianterne findes en tilnærmet værdi for længden af diagonalen i et kvadrat med siden 1, altså for $\sqrt{2}$. Tilnærmelsesværdien er $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$, svarende til 1.414216 (mod den rigtige afrunding med 6 decimaler: 1.414214). Man kender ikke baggrunden for denne tilnærmelse.

Snore og bambuspinde blev ikke bare benyttet til at konstruere retvinklede trekanter, men også til at fremskaffe cirkler og kvadrater, til at halvere linjestykker m.m. I den forbindelse beskæftigede man sig med at løse endnu et alterproblem: til en given cirkel at konstruere et kvadrat med samme areal (cirklens kvadratur), og til et givet kvadrat at konstruere en cirkel med samme areal ("kvadratets cirkulatur"). Disse problemer der er berømte i matematikkens historie (det kan bevises at de er uløselige ved konstruktion med passer og lineal), kunne inderne selvfølgelig ikke løse eksakt (de tænkte næppe heller sådan på det). De gav imidlertid en tilnærmet løsning ved hjælp af snorekonstruktioner. De indebærer en tilnærmelse af π med 3.o88.

Også den oldindiske matematik som den fremtræder for os gennem Sulvasutra havde et samfundsmæssigt udspring, her et religiøst-praktisk i form af alterbyggeri. Skønt geometrisk snarere end aritmetisk/algebraisk orienteret var indernes matematik på denne tid af samme grundpræg som de øvrige orientalske oldtidskulturers matematik.

OPSAMLING

I det foregående er der flere gange blevet talt om fælles træk ved de forskellige mellem- og fjernøstlige oldtidskulturers matematik. Lad os resumere disse træk her og forsøge at udvinde en første morale af dem, angående matematikkens rolle i samfundet samt ydre og indre drivkræfter for dens udvikling. Denne morale vil ikke blive universel, som det vil fremgå af den videre fremstilling, men vil sammen med andre moraler vedrørende andre tider og andre steder give svar på nogle af de spørgsmål der blev opstillet i indledningen til denne tekst.

I alle de omtalte oldtidskulturer fandt matematikken sit udspring i det omgivende samfunds behov, hovedsagelig i dets produktion og organisation, men også til en vis grad i dets religiøse og ideologiske liv. Matematikken skulle løse målings- og beregningsopgaver. For at kunne det måtte den nu og da arbejde med problemstillinger og udvikle metoder der så at sige opnåede et eget indre matematisk liv, og nu og da hændte det at begrebs- og metodeudviklingen rakte ud over hvad der var praktisk brug for, som når der leveredes tilnærmelser til $\sqrt{2}$ og π med langt større nøjagtighed end man i det hele taget kunne realisere i praktisk arbejde, f.eks. i byggeri.

Da matematikken allerede fra begyndelsen var et vanskeligt tilgængeligt felt, var det nødvendigt at formidle indsigt i den gennem en særlig undervisning, omgærdet med fagsprog og indvielsesmystik. Oldtidens matematikere var ikke i mindre grad end nutidens en fåtallig, specialuddannet og eksklusiv ekspertgruppe af høj prestige. Det hændte ofte at undervisningen foregik ved bearbejdning af tænkte eksempler, konstrueret til indlæringsbrug, uden selvstændig her-og-nu-værdi for nogen, eksempler hvor metoderne og teknikkerne stod i centrum frem for resultaterne. Også dette har bidraget til at matematikken stedvis fik et vist egenliv.

Derimod er der ingen grund til at tro at oldtidssamfundene lod matematikken studere for dens egen skyld. Matematiske problemstillingen og lovmæssigheder blev ikke kulegravet og afdækket, hvis de ikke havde en eller anden synlig forbindelse til problemstillinger der var interessante for samfundet, eller for nogen i samfundet. Det er en af pointerne for denne fremstilling af matematikkens historie, at denne snævre tilknytning til praksis, ud over faktisk at løse praktiske opgaver, også udgjorde en skranke som matematikken, skønt højtudviklet, havde vanskeligt ved at udvikle sig ud over. En anden pointe, nært forbundet med den første, er at hvis, på den anden side, matematikken helt mister kontakten med praksis, hvis den alene lever sit eget indre liv, mister den orienteringsevnen og tørrer ud af mangel på næring, i det mindste samfundsmæssig næring. Denne pointe vil vi møde under behandlingen af den græske matematik og se illustreret af den glemsel som væsentlige dele af den undergik fra omkring 3oo e.v.t. til renæssancen i 15oo-16oo i Europa.

Vi er gået mere i detaljer i omtalen af matematikken i de orientalske oldtidskulturer end der ville være plads til, hvis andre tiders og steders matematik skulle behandles i samme detaljeringsgrad. Ud over at give stof til den ovennævnte morale angående samspillet mellem matematik og omverden, har dette tre grunde:

For det første er oldtidskulturernes matematik, på trods af alle fortolkningsproblemr, set med moderne øjne tilstrækkeligt enkel til at man kan få øje på nogle af de fundamentale startpunkter for matematisk virksomhed, på nogle af de betragtningsmåder og metoder der er knyttet til matematikkens begyndelse, og på nogle af de begrebsmæssige hurdler (lad os bare minde om talsystemet), der har skullet overvindes for at matematikken kunne komme kvalitativt videre, hurdler som det for nogles vedkommende har taget tusinde år at overvinde. Ved at se nøjere på disse forhold får man altså et indblik i matematikkens tidligste værksteder. Måske får man også, ved at blive konfronteret med hvad der var vanskeligt for oldtidens frontforskere, lidt respekt for de vanskeligheder børn og andre der skal lære matematik i vore dage stilles over for og reagerer på.

For det andet danner beskrivelsen af de før-græske civilisationer baggrund for at forstå dels i hvor høj grad grækernes matematik, nærmere bestemt deres geometri, som vil blive behandlet i næste kapitel, repræsenterer et utroligt niveauspring i matematikkens udvikling, men også i hvor høj grad springet i en bestemt del af den græske tradition bygger på mellemøstlige kulturers, især mesopotamernes, indsats.

For det tredje vil det med de orientalske kulturers matematik i baghovedet være muligt at forstå, hvordan der i perioden fra 3oo e.v.t. til 12oo, som i den europæiske matematiks historie er mørke århundreder, kunne ske ikke bare en overvintring, men en blomstring af matematikken, frem for alt algebraen, i Kina, Indien og i det islamisk-arabiske rige. Denne blomstring blev en afgørende forudsætning for den eksplosive udvikling der blev sat i gang i europæisk matematik i renæssancen, og som stadig forløber. Denne udvikling kom netop i stand ved en sammensmeltning af grækernes bidrag til geometrien og den orientalske algebra, i middelalderen formidlet til Europa gennem araberne. Herom skal der sides fortælles nærmere.

MATEMATIKKEN I OLDTIDENS GRÆKENLAND

INDLEDNING

På et eller andet tidspunkt, ikke senere end 300 f.v.t., har matematikken i oldtidens Grækenland fået en radikalt anden karakter end i de øvrige oldtidskulturer (og i store dele af den senere matematik). Den opgav at benytte tal som grundlag for beskrivelse af tingenes væsen, og fandt i stedet dette væsen gemt i geometrien og de lovmæssigheder den er underlagt. I den måde hvorpå geometriske objekter blev undersøgt lå en dyb mistillid til gyldigheden af umiddelbare erfaringer. Matematikken/geometrien blev nemlig efterhånden opbygget som et abstrakt system, hvis resultater var udledt på basis af et lille antal på forhånd opstillede forudsætninger, og hvor kun udledninger, der overholdt ganske strenge logiske spilleregler blev godtaget. Hos grækerne holdt altså <u>beviset</u> sit indtog i matematikkens historie.

Selv med nutidens øjne besad grækernes matematik en dybde og en kvalitet, der stadig er forbløffende. Store dele af hvad de nåede står stadig ved magt. Men efter den hellenistiske verdens sammenbrud gik det ned ad bakke med græsk matematik. Den forsvandt, omkring 500 e.v.t. ud af europæisk matematikhistorie for mere end tusind år, indtil dens betragtningsmåder og metoder blev genopdaget og -optaget i forbindelse med det videnskabelige gennembrud i renæssancen i perioden 1500-1700.

To spørgsmål vil optage os i dette kapitel.

(1) Hvordan kunne det gå for sig, at grækernes matematik fik den særlige karakter den fik, hvad var årsagerne og ad hvilke veje kunne det komme så vidt?

(2) Hvorfor gik grækernes matematik i glemmebogen i europæisk videnskabs historie i så lang en periode?

Disse og beslægtede spørgsmål har i mindst hundrede år beskæftiget videnskabshistorikerne, som har givet mange forskellige svar. Ingen af dem er endegyldige, hvilket næppe heller er forventeligt med spørgsmål af den art. For at der skal være mening i og mulighed for at "besvare" spørgsmålene er det naturligvis påkrævet at den græske matematiks udseende klarlægges nærmere end det sker ved stikordene i indledningen.

I denne fremstilling vil vi operere med tre perioder, den før-euklidiske, den euklidiske og den efter-euklidiske periode. Navngivningen refererer til den nøgleskikkelse, Euklid, hvis "Elementer" fra omkring 3oo f.v.t. leverer det første, til os overleverede, tydelige og gennemarbejdede vidnesbyrd om grækernes principielt nye bidrag til matematikkens historie. Som altid ved sådanne periodeopdelinger er skellet ikke så skarpt i virkeligheden som det er sat i teorien. Faktisk har det været og er stadig en opgave for forskningen i den græske matematiks historie at blotlægge de udviklingslinjer der fører frem til og videre fra Euklids "Elementer".

DEN FØR-EUKLIDISKE PERIODE, CA.6oo f.v.t. - CA. 3oo f.v.t.

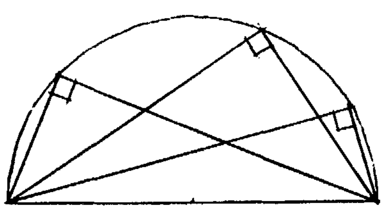
Vores viden om denne periodes matematik beror ikke som for de ældre oldtidskulturers vedkommende på bevarede førstehåndsmaterialer. Kildesituationen er vanskelig, fordi grækerne skrev - når de da ikke overleverede deres matematik mundtligt til elever eller kolleger - på papyri, men gemte dem ikke i tørt sand eller pyramider. Derfor er de stort set alle gået tabt, selv om der kendes titler på en del af dem. Kendskabet til periodens matematik stammer dels fra fragmenter i senere forfatteres mere eller mindre pålidelige gengivelse, dels fra spredte bemærkninger i ikke-matematiske tekster af digtere og filosoffer, bl.a. Platon og Aristoteles. Flest oplysninger om den før-euklidiske matematik findes i en matematikhistorie skrevet på aristoteles'tid af et medlem af hans skole, Eudemos fra Rhodos, i ca. 320 f.v.t. Men også dette værk er i sin oprindelige skikkelse gået tabt. Vi kender det gennem den sen-græske skribent Proklos (400-485 e.v.t.), der inkorporerede det i sine "Kommentarer til den første bog af Euklids Elementer".

Hvor fortolkningen af flod-kulturernes matematik er vanskelig fordi det kun sjældent af de bevarede tekster er muligt at komme til klarhed over de benyttede metoder, står vi altså med den tidlige græske matematik i det mere basale problem, at vi ikke engang kan rekonstruere periodens tekster på betryggende måde.

Begyndelsen

Det er da også sådan, at ikke bare metoderne, men allerede indholdet og arten af de ældste græske bidrag til matematikken er omstridt, selv om man kender navne på en række af de personer der i følge traditionen har givet bidragene. Det er til gengæld ikke omstridt, at den græske matematik begyndte i det joniske område, altså på Lilleasiens vestkyst (i det nuværende Tyrkiet) og på øerne langs denne (de er stadig græske) og senere flyttede til Syditalien med de joniere der forlod området efter persernes erobringer midt i 500-tallet.

Begyndelsen blev efter traditionen gjort omkring 600 f.v.t. af Thales fra Miletos (ca 620-550 f.v.t. , men årstallene fra perioden må tages med forbehold). Han var en rig og berejst købmand, der bl.a. skal have været i Mesopotamien og i Ægypten. Han beskæftigede sig med opfinderi, politik og naturfilosofi (regnes for den første af de såkaldte joniske naturfilosoffer. Men altså også med matematik, hvor han tillægges forskellige matematiske resultater, bl.a. at vinklerne ved grundlinjen i en ligebenet trekant er lige store, og den såkaldte Thales' sætning, som siger at en periferivinkel der spænder over en diameter altid er ret (se figuren)



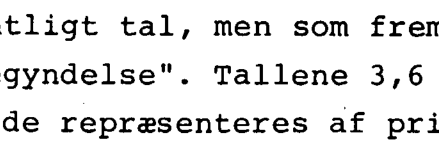
Men hvad kan egentlig Thales' indsats her have været? Selve resultatet i sætningen var kendt af Babylonerne tusind år før Thales. Det har fået nogle moderne matematikhistorikere til at fæste lid til senere græske skribenters (Proklos') antydning af at Thales indsats var at levere et bevis for påstanden, eller i hvert fald at sætte den i logisk forbindelse med mere fundamentale geometriske udgangspunkter (van der Waerden, støttet af Boyer), mens andre afviser dette og andre forestillinger om Thales' bidrag som uhistoriske (Neugebauer, ref. af Boyer).

Pythagoras (ca. 580 f.v.t.-500 f.v.t.) fra den joniske ø Samos var endnu mere legendarisk end Thales. Efter at have rejst meget, bl.a. i Babylon og Ægypten, grundlagde han i den græske koloni Kroton i Syditalien et filosofisk-religiøst broderskab, der bestod i mere end hundrede år. Dets medlemmer blev kaldt pythagoræere. Broderskabets gøremål, der bl.a. indebar overholdelsen af et sæt religiøst-mystiske leveregler og ritualer af orientalsk påvirkning, var tildels hemmeligt og kollektivt. Udviklingen af broderskabets lære var i hænderne på en inderkreds som kaldtes "mathematikoi". Det er herfra vi har ordet matematik. Det kommer af "mathema", som betyder "det lærte". Pythagoræernes religiøse og videnskabelige læresætninger og resultater blev tilskrevet grundlæggeren. Derfor er det stort set håbløst, og vel heller ikke så interessant, at skelne mellem hvad pythagoræerne udførte på matematikkens område og hvad personen Pythagoras selv skabte.

Pythagoræerne

Under alle omstændigheder har vores viden om pythagoræernes matematik mange mangler. Det står dog fast at deres bestræbelser tidligt bestod i at sætte verdens indretning i forbindelse med (hele) tal og forhold imellem dem. Pythagoræeren Philolaos har således sagt, at "i virkeligheden har alt hvad man kan erkende et tal. Thi uden det lader intet sig fatte eller erkende".

En del af pythagoræernes virksomhed var orienteret mod talmystik. Afhængigt af tallenes matematiske egenskaber tillagdes de forskellige metafysiske roller. Tallet 1 blev ikke selv anskuet som et egentligt tal, men som frembringeren af alle andre, "al tings begyndelse". Tallene 3,6 og 10 var såkaldte trekantstal, fordi de repræsenteres af prikker der danner ligesidede trekanter:



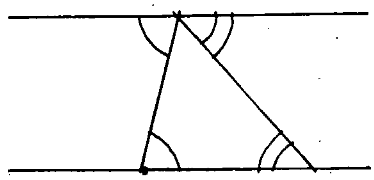
Trekantstallet 10 blev betragtet som helligt, det ansås for at repræsentere universet. Nogle tal er, med en stadig gældende sprogbrug, <u>kvadrattal</u>. Det er sådanne tal, der kan repræsenteres af prikker der danner et kvadrat:

```
• •    • • •    • • • •
• •    • • •    • • • •
       • • •    • • • •
                • • • •
```

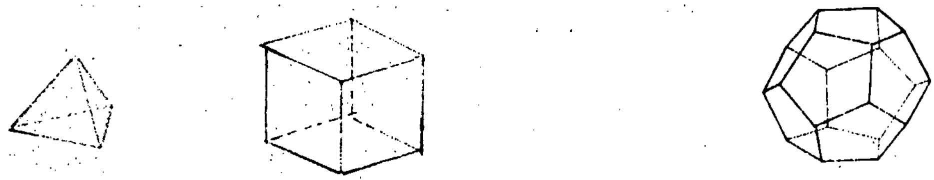
Andre tal er fuldkomne tal. De er summer af deres divisorer, fraregnet tallet selv. Tallet $6 = 1 + 2 + 3$ er et sådant tal. Pythagoræerne vidste, at også 28, 496 og 8128 er fuldkomne tal, og mere generelt at tal af formen $2^n(1+2+....+2^n)$ er fuldkomne, når $1+2+....+2^n$ $(=2^{n+1}-1)$ er et primtal. Undersøgelser af denne og lignende art, angående spaltelighed, primtal, delelighed osv., som pythagoræerne altså befattede sig med, kaldte grækerne for "aritmetik" (af "arithmos", antal), til forskel fra "købmands" regning som de kaldte "logistik", regnekunst.

Pythagoræerne opdagede at der var simple talmæssige sammenhænge mellem de længder "ens" svingende strenge skal have for at afgive toner i musikalsk harmoni. Hvis en streng af en vis længde holdes fast i den ene ende og i midtpunktet, afgiver den en tone som er en oktav højere end den fulde strengs tone. Hvis 2/3 af strengen svinger er tonen en kvint højere, hvis 3/4 en kvart o.s.f. Pythagoræerne udviklede på dette grundlag en harmonilære som var temmelig sofistikeret, og som blev stående langt op i vor tid. Harmonilæren er blevet kaldt historiens første kvantitative naturlove. Men ikke alle pythagoræernes forestillinger om verden som forklarlig kun ved hjælp af tal havde denne empiriske karakter.

Heller ikke når det gælder geometri er vores viden om hvad pythagoræerne gjorde særlig sikker. Efter traditionen skulle de, og endda Pythagoras selv, have bevist den pythagoræiske læresætning (i en retvinklet trekant er kvadratet på hypotenusen lig summen af kateternes kvadrater). Som tidligere nævnt havde dette resultat længe været kendt af babylonerne. Diskussionen står om hvorvidt, eller i hvilken forstand, pythagoræerne virkelig kendte et bevis. Det vides ikke med bestemthed, men der er ikke noget i vejen for at de faktisk gjorde. Ligeledes er det meget tænkeligt at standardbeviset for at vinkelsummen i en trekant er 180^o, skyldes pythagoræerne:

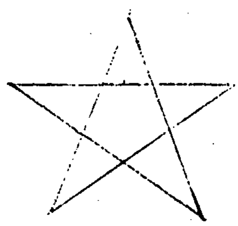


Af de fem regulære polyedre der eksisterer (rumlige legemer dannet med ens plane figurer som sider, hvor alle kanter og kantvinkler er lige store, og hvor alle vinkler mellem naboplaner er ens) skal pythagoræerne have kendt i hvert fald de tre, tetraederet, terningen (hexaederet) og dodekaederet:



Muligvis også oktaederet og ikosaederet:

Dodekaederet kan de have lært at kende fordi der i Italien findes en svovlkis, pyrit, som benyttedes til jernudvinding, og som krystalliserer i dodekaedre. Endvidere kender man et dodekaeder fra en etruskisk grav fra o. 500 f.v.t. Hvad enten nu pythagoræerne virkelig kendte dodekaederet eller ej, kendte de den regulære femkant, der danner dets sider. Den optræder nemlig i deres ordenstegn, pentagrammet:



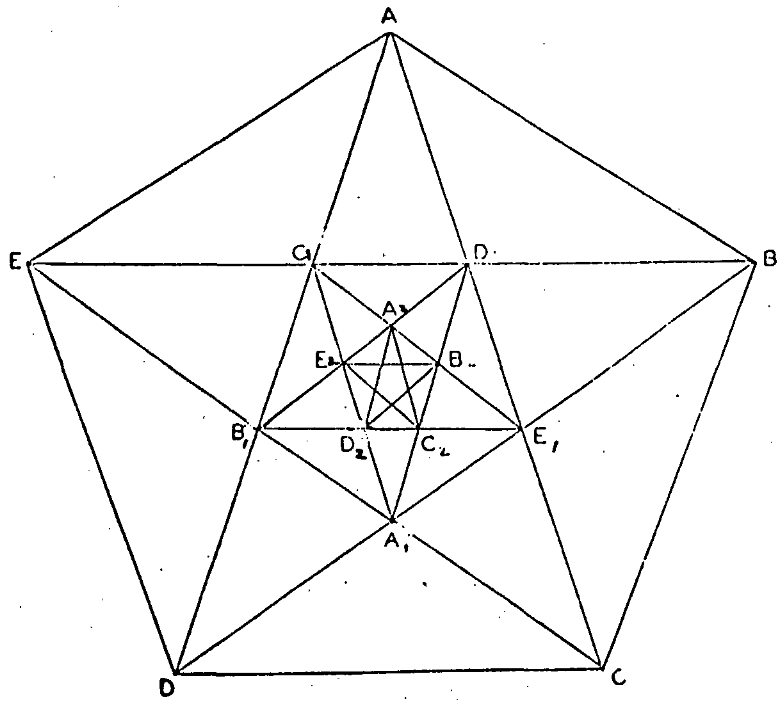
Det er blevet foreslået, og forslaget har en del for sig, at undersøgelser af denne figur kom til at spille en afgørende rolle for matematikkens videre udvikling. Nærmere bestemt for at pythagoræernes bestræbelser på at forstå verden gennem hele tal og talforhold fik et grundskud som omdannede oldtidens græske matematik på en måde der blev bestemmende for udformningen af også moderne tiders matematik. Det vil vi opholde os lidt nærmere ved.

Inkommensurable størrelser

Ved studiet af geometriske figurer knyttede pythagoræerne, som nærliggende var og er, tal til forskellige af figurernes dele, til længden af linjestykker, til arealer, rumfang m.m. Imidlertid ønskede de at måle figurerne så resultaterne alle blev hele tal. Dvs. til en given figur skulle der findes en længdeenhed som går et helt antal gange op i samtlige de stykker man ønskede at måle. Ud fra praktiske erfaringer og intuitive betragtninger skulle det ikke volde vanskeligheder at få dette ønske opfyldt, selv om man måske fik brug for en meget lille enhed. Har man f.eks. to linjestykker som er henholdsvis 44.1 cm og 32 cm lange kan man som fælles enhed bruge 1 mm, men ikke nogen større enhed (44.1 cm = $7^2 \cdot 3^2$ mm og 32 cm = $2^6 \cdot 5$ mm). Det gik imidlertid op for pythagoræerne, at det ikke altid er muligt at måle to forelagte linjestykker med en fælles enhed og hele tal som resultat, uanset hvor lille man forestiller sig enheden valgt. Og denne umulighed er ikke kun en praktisk umulighed, men en principiel umulighed. Kalder man to linjestykker der kan måles med en fælles enhed for kommensurable (ordet betyder sam-målelige), findes der altså inkommensurable linjestykker. Og det er her den regulære femkant og pentagrammet kommer ind i billedet.

Selv om det må kaldes en hypotese, kunne det se ud til at pythagoræerne, mere præcist Hippasos fra Metapuntum, engang i det 5. århundrede f.v.t., måske omkring 42o, måske før, indså at siden og diagonalen i en regulær femkant er inkommensurable. (En diagonal er et linjestykke der forbinder hjørner som ikke er naboer.) I hvert fald blev Hippasos ekskluderet af det pythagoræiske broderskab, i følge nogle opgivelser endog druknet, fordi han skulle have røbet hemmeligheden om inkommensurabilitet og om pentagrammet eller dodekaederet. At siden og diagonalen i den regulære femkant er inkommensurable kunne pythagoræerne have opdaget således:

Først er det nødvendigt at klargøre sig nogle af pentagrammets egenskaber. Forbindes dets spidser fremkommer en regulær femkant ABCDE. Inde i pentagrammet, hvor den første femkants dia-



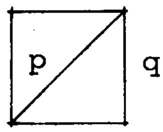
gonaler skærer hinanden, ligger den regulære femkant $A_1B_1C_1D_1E_1$. Dens diagonaler danner et nyt pentagram, der indeholder den nye regulære femkant $A_2B_2C_2D_2E_2$. Dens diagonaler danner et nyt pentagram, og således kan vi fortsætte vilkårligt længe. Der opstår stadigt mindre pentagrammer og femkanter, hvis sidelængder bliver mindre og mindre, så små det skal være. Nu er det i ethvert af pentagrammerne sådan, at stjernespidsernes ben - i det store pentagram AC_1, AD_1, BD_1,...osv. - alle er lige lange. Disse stykker har desuden samme længde som diagonalerne A_1C_1, B_1D_1,...osv. i den anden femkant. Endvidere er siden AE (og de øvrige sider) lig stykket AB_1 (og de tilsvarende stykker). Tilsvarende relationer gælder i alle de indre pentagrammer. Disse egenskaber får man øje på stort set umiddelbart, bare ved at se på figuren med dens mange symmetrier. Hvis pythagoræerne (Hippasos?) ikke lod sig nøje med det, kunne de let have bevist egenskaberne ved gentagen anvendelse af resultater der var kendt på den tid, især sætningen om at en trekant er ligebenet netop hvis to vinkler er lige store. Det er imidlertid ikke afgørende for pointen om man nåede frem til pentagrammets egenskaber ved figurbetragtning eller ved en eller anden form for beviser. Hovedsagen er at disse egenskaber gør det muligt temmelig direkte at blive opmærksom på den nævnte inkommensurabilitet, for den der interesserer sig for at udtrykke linjestykkers længder i forhold mellem hele tal.

Lad os nemlig nu antage at AE og AD var kommensurable, dvs. at der fandtes et fælles mål s, altså et linjestykke der går et helt antal gange op i begge. Så ville s også gå op i AD-AE, der er lig $AD-AB_1 = DB_1$. Når altså s går op i både AD og DB_1, da også i deres differens $AD-DB_1$, lig $AD-AC_1 = B_1C_1$. Vi har dermed fundet at s går op i både DB_1 og B_1C_1. Men nu er $DB_1 = B_1D_1$, diagonalen i den anden femkant, mens B_1C_1 er siden i denne. Det betyder, at s ikke bare er fælles mål for diagonalen og siden i den store femkant, men også i den næste. Men dette argument kan jo gentages vilkårligt ofte. Derved bliver s også fælles mål for siden og diagonalen i den tredje femkant, i den fjerde og så fremdeles. Men da femkanterne bliver så små det skal være, vil siderne tilstrækkeligt langt ude i processen være mindre end s. Men det kan ikke forenes med at s går op i dem. Modstriden opstod ved antagelsen om at AE og AD var kommensurable. Det kan de altså ikke være.

Denne fremgangsmåde er ikke begrænset til pentagrammet, men egner sig til i almindelighed at afgøre om to linjestykker har et fælles mål: Opgaven er uinteressant hvis stykkerne er lige lange. Det undersøges nu først hvor mange gange det mindste stykke kan være i det største. Den rest der eventuelt er tilbage, er mindre end det mindste stykke. Det undersøges så hvor mange gange resten kan være i det mindste stykke. Den eventuelle ny rest er mindre end den gamle. Så undersøges hvor mange gange den ny rest går op i den gamle, og således fortsættes. Hvis processen ender, ved at der på et tidspunkt ingen rest er, er det sidst benyttede linjestykke det søgte fælles mål. Hvis processen derimod aldrig ender er stykkerne inkommensurable. Det indses på samme måde som ovenfor. Denne fremgangsmåde er en direkte kopi af den der benyttedes fra gammel tid til at finde den største fælles divisor mellem to hele tal (en fremgangsmåde der siden er blevet kaldt Euklid's algoritme). Med hele tal vil processen imidlertid altid ende, fordi resten i hvert skridt bliver mindre end i det foregående, hvilket kun kan lade sig gøre et endeligt antal gange.

Det har ellers været gængs i matematikhistorien at gå ud fra, at opdagelsen af inkommensurable linjestykker skete i forbindelse med kvadratet, hvor det gælder at siden og diagonalen heller ikke er kommensurable. Et bevis for dette står nemlig i (en tilføjelse til) Euklids lo. bog (fra ca. 3oo f. v.t.). Det lyder i moderniseret skikkelse:

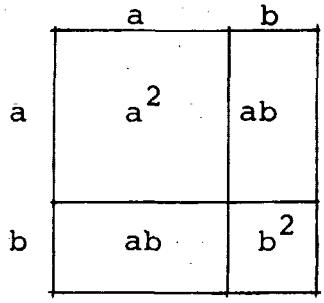
Lad os antage at der eksisterer et kvadrat hvor siden og diagonalen er kommensurable. Dette kommer ud på at der findes hele tal p og q, så at diagonalen har længden p og siden q, målt i en fælles enhed. Vi kan gå ud fra at brøken p/q ikke kan forkortes; ellers kunne vi have valgt en større fælles enhed. Nu er i følge den pythagoræiske læresætning $p^2 = q^2+q^2 = 2q^2$. Da p^2 dermed er det dobbelte af q^2, må p^2 være lige.



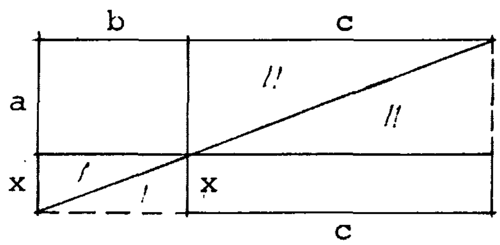
Så må også p være lige, fordi kvadratet på et ulige tal er ulige. Altså må p have formen $p=2p_1$, hvor p_1 er et helt tal, sådan at vi ved indsættelse finder $4p_1^2=2q^2$, eller $2p_1^2=q^2$. Men deraf følger med det samme ræsonnement som før at q^2 og dermed q er lige. Vi har altså fundet at både p og q er lige. Det betyder at brøken p/q kan forkortes (med 2), i strid med at den var antaget uforkortelig. Forudsætningen om at siden og diagonalen i et kvadrat er kommensurable kan altså ikke opretholdes. Dermed er påstanden bevist. Beviset er et såkaldt indirekte bevis, hvor man viser en påstand ved at antage dens modsætning og heraf aflede absurde konsekvenser. Formuleret med nutidens sprogbrug har vi fundet at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal, da længden af diagonalen i et kvadrat med siden a netop er $a\sqrt{2}$.

Geometrisk algebra

En følge af opdagelsen af inkommensurable størrelser var, at en klasse af problemer som egentlig er aritmetiske/algebraiske, f.eks. løsning af ligninger, og dermed er nært forbundet med tal, ikke med tryghed kunne behandles i en talmæssig ramme. De oversattes i stedet til geometriske problemer og blev behandlet som sådanne, med metoder hvor kommensurabilitet eller inkommensurabilitet ingen rolle spillede. En simpel illustration af hvad der er tale om har vi i den algebraiske formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Skønt den i første omgang handler om tal, kan den fortolkes geometrisk, til at handle om arealerne af rektangler og kvadrater. Den kan da formuleres således: Et kvadrat hvis side er delt i to stykkker, er sum af de to kvadrater der kan dannes heraf, samt to gange det rektangel der kan dannes af stykkerne.



Men ellers får tankegangen først og fremmest betydning i forbindelse med de såkaldte <u>fladeanlæg</u>, der på græsk hed parabole. I den simpleste situation er opgaven denne: Der er givet et rektangel med siderne a og b samt et linjestykke c. Der skal nu bestemmes et linjestykke x, så at rektanglet med siderne c og x får samme areal som rektanglet med siderne a og b.



Den kan løses geometrisk ved i forlængelse af b at lægge c, og fra c's endepunkt trække diagonalen som angivet på figuren. Hvor denne diagonal skærer a's forlængelse fremkommer et punkt. Stykket herfra og til a's endepunkt er det søgte x. For i det store rektangel er de retvinklede trekanter på hver side af diagonalen parvis kongruente. Det der mangler på den ene side, altså rektanglet ab, og på den anden side, altså rektanglet cx, må så også have samme areal. Dette godtgør påstanden. Tilsvarende metoder blev benyttet til at løse visse 2.gradsligninger geometrisk, de samme som mesopotamerne kunne løse.

På den måde opbyggedes i den før-euklidiske græske matematik, antagelig i et pythagoræisk miljø, et sæt metoder til at fortolke og løse algebraiske problemer som geometriske konstruktioner, der efterhånden udvikledes til et omfattende system. Efter den danske matematiker og matematikhistoriker H.G.Zeuthen (1839-192o) kaldes dette apparat geometrisk algebra.

Vi har tidligere brugt det samme navn om mesopotamernes metoder til at løse lignende problemer. Disse metoder var antagelig kendt af grækerne gennem joniernes forbindelse med Babylon. Der er imidlertid en væsentlig forskel mellem grækerne og babylonerne i dette stykke. For det første nærede babylonerne ingen tvivl om talbegrebets sundhed. De aritmetisk/algebraiske opgaver de løste, løste de som sådanne, blot med geometriske navne til støtte for intuitionen, og måske også for fortolkningen. Mange af dem havde nemlig udspring i praktiske forhold, f.eks. bygningsanlæg. Grækerne, derimod, nærede i høj grad mistillid til talbegrebets sundhed, deres omformning af algebraiske opgaver til geometriske tjente netop som middel til at komme om ved dette problem. Desuden er der ikke noget der tyder på at disse opgaver skulle have et praktisk udspring, selv om der måske har været forbindelseslinjer til tempelbyggeri og lignende.

Uendelighedsbegrebet

Opdagelsen af inkommensurable størrelser bidrog til hvad der af historikerne er blevet kaldt en krise i græsk matematik. Med denne opdagelse blev det umuligt for grækerne at basere en tilfredsstillende behandling af geometriske fænomener og fysiske fænomener på en talmæssig beskrivelse. Det er afgørende at forstå at dette ikke var et praktisk problem, men et teoretisk. Til alle praktiske måleformål kunne man klare sig med tilnærmelser, og gjorde det også, men når det gjaldt forståelse af verdens indretning tilfredsstillede dette ikke grækerne.

Men det knæk pythagoræernes program led ved opdagelsen af inkommensurable størrelser, var ikke det eneste knæk programmet blev udsat for. Et andet knæk havde at gøre med uendelighedsbegrebet. Endnu engang må det gøres klart, at hændelsesforløbet kun kan rekonstrueres gennem fortolkninger, og at disse kan føre til forskellige resultater. Den gængse rekonstruktion knytter an til den beskrevne metode til at finde et fælles mål for to linjestykker. Hvis denne proces ikke ender, hvis der altså ikke findes et linjestykke som går op i begge de givne, kunne man sige at disse har et uendeligt lille fælles mål, eller at linjerne er dannet af uendeligt mange punkter uden udstrækning. At pythagoræerne virkelig sagde noget i den retning, ikke bare om linjestykker, men om den fysiske verden i almindelighed, er der rimeligt belæg for. F.eks. omtaler Aristoteles pythagoræernes forestilling om et punkt sådan: et punkt er "enheden anbragt i en position".

En torpedo mod disse betragtninger var for grækerne Zenon's paradokser. Zenon fra Elea, der virkede omkring 450 f.v.t., tilhørte den såkaldte eleatiske skole af filosoffer der gik vidt i dristige spekulationer over verdens indretning, spekulationer som i endnu højere grad end joniernes var frigjort fra tingenes umiddelbare fremtrædelse. Zenon's berømteste paradoks er "Achilleus og skildpadden". Hvis superhelten Achilleus og en skildpadde skal løbe om kap, og skildpadden får et forspring, ligegyldigt hvor lille, kan den ikke indhentes af Achilleus. For først skal Achilleus nå hen til det sted hvor skildpadden startede. Imens har skildpadden nået at bevæge sig et lille stykke, hen til en ny position. Så skal Achilleus nå frem til denne position. På den tid han bruger på det har skildpadden bevæget sig yderligere et lille stykke, som Achilleus så må tilbagelægge. Og så fremdeles, skildpadden vinder altid. Et andet paradoks godtgør umuligheden af bevægelse. For at kunne bevæge sig fra et sted til et andet, må man først tilbagelægge halvdelen af strækningen. Men før det må man tilbagelægge en fjerdedel, før det igen en ottendedel, osv., altså uendeligt mange små stykker. Men så kan bevægelsen aldrig komme i gang.

Kernen i det første paradoks er en forudsætning om, at når der til en endelig strækning (skildpaddens forspring) lægges uendeligt mange, ganske vist stedse mindre, stykker bliver resultatet et uendeligt langt stykke. Forudsætningen i det andet paradoks erat et givet linjestykke ikke kan underdeles i uendeligt mange stykker, de være sig nok så små.

Den gængse fortolkning af Zenon's budskab (der går tilbage til Paul Tannery) er, at da alle ved at Achilleus vil vinde kapløbet, og at bevægelse faktisk er mulig, må det være forestillingen om uendeligt mange vilkårligt små linjestykker der er absurd. Altså er pythagoræernes forestilling om ting som sammensat af uendeligt mange punkter absurd. Denne fortolkning går altså ud fra at Zenon's paradokser er fremsat som bidrag til en polemik. I følge andre fortolkninger mente han paradokserne alvorligt, dvs. fandt på den ene side ræsonnementerne logisk uangribelige, og fandt på den anden side konsekvenserne absurde.

Uanset hvilken mulighed der er den rigtige opløste grækerne aldrig paradokserne, der da også har forårsaget filosofisk ravage til senere tider. (En opløsning skete først efter renæssancen, hvor udviklingen af infinitesimalregningen og teorien for uendelige rækker tillagde det god mening under visse omstændigheder at addere uendeligt mange positive tal med et endeligt tal til resultat.) En følge af uendelighedsparadokserne og af inkommensurabilitetsproblemet blev at den videre udvikling af grækernes matematik kom til at finde sted uden at være baseret på talmæssig målelighed eller på et direkte uendelighedsbegreb. Nogle historikere (Szabó) mener at disse problemer førte til <u>aksiomatikkens</u> indtog i græsk matematik. Når det nu var så let ud fra tilsyneladende rimelige forestillinger og god logik at geråde i alvorlige vanskeligheder, måtte man basere sine overvejelser på et sæt af forudsætninger ingen ville anfægte, såkaldte aksiomer. Det er netop hvad der sker hos Euklid.

Matematikken og den joniske naturfilosofi

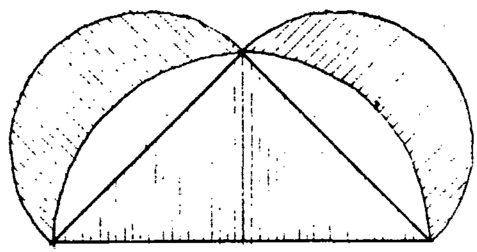
Uanset hvilke nærmere matematiske resultater og metoder pythagoræerne kan tillægges, kom deres indsats til i væsentlig grad at præge matematikkens udvikling. Deres hovedinteresse var at opnå erkendelse snarere end praktisk udbytte. De, og de øvrige joniske matematikere, stillede "hvorfor"-spørgsmål frem for "hvordan"-spørgsmål. Hvilken karakter deres besvarelse af "hvorfor"-spørgsmålene, altså deres bevisførelse, nærmere havde, hvor udviklet deres system var, osv kan diskuteres, og bliver det stadig. Afgørende er, at når der til matematikken stilles "hvorfor"-spørgsmål, bliver der tale om en helt anden slags matematik end i de andre oldtidskulturer vi har omtalt. Man forstår bedst dette vendepunkt i matematikkens historie ved at se de joniske matematikere og pythagoræerne i en bredere sammenhæng, nemlig i sammenhæng med de joniske naturfilosoffer.

De joniske naturfilosoffer begyndte tidligt at interessere sig for at finde mekanismerne og årsagerne bag fænomenerne, fremfor at beskrive fænomenerne selv. Især interesserede de sig for at bestemme de ingredienser verden er opbygget af. Hver af de joniske filosoffer, til hvis kreds Thales og de første pythagoræere må siges at høre, havde sit eget bud på hvad disse elementer var. For Thales bestod alting af vand. Hans elev Anaximander (ca. 600-546 f.v.t.) talte om "det ubegrænsede" som princippet for verdens indretning. Den lidt yngre Anaximenes (ca. 585-525 f.v.t.) mente at tingene var dannet af luft i forskellige fortyndingsgrader. Hvad de alle søgte var det grundlæggende og uforanderlige (kaldet physis) for en verden i forandring.

Karakteristisk for joniernes metode var at de søgte svarene på deres spørgsmål ikke så meget ved iagttagelse af fænomenerne i naturen som ved spekulationer og ræsonnementer over den. De opstillede tankemæssige modeller over naturens indretning. I disse modeller var der ikke plads for guder eller andre mytologiske væsener. Kun til et skabende princip. Det at konstatere, og undgå, problemer og modsigelser i spekulationerne blev den motor der drev udviklingen af filosofien. Den filosofi der kom ud af det, gik ganske radikalt til værks i sin afskrivning af dagligdags erfaringer og iagttagelser ("sanserne bedrager") som pålidelige kilder til erkendelse af verdens indretning. Denne erstatning af erfaringer med spekulationer holdt i tømme af ræsonnementer blev et stedse mere dominerende træk i græsk filosofi, først hos de såkaldte eleatiske filosoffer (efter den syditalienske by Elea), med Parmenides (ca. 480 f.v.t.) og Zenon (ca 450 f.v.t.) i spidsen, og siden i sit fuldeste flor hos Platon (427-347 f.v.t.) i det 4. århundrede. Når altså den joniske matematik blev erkendelsesrettet frem for praksisrettet var det blot et specialtilfælde af den filosofiske orientering. Men så må man spørge videre: hvorfor fik den joniske filosofi dette præg? Der synes at være et par elementer i en forklaring. Det joniske samfund bestod, som de fleste græske samfund, af en række selvstyrende bystater, såkaldte polis'er, hvis materielle grundlag var håndværk og handel, suppleret med det nødvendigste og ikke særligt trælsomme landbrug. Der var ikke som i flodkulturerne tale om samfund der stod og faldt med en vellykket varetagelse af en overrislingsbaseret landbrugsøkonomi. Der var derfor heller ikke i de joniske bystater (behov for) nogen stram central organisation, et magthieraki med embedsmænd/præster i spidsen for administrationen. Disse forhold frembragte en stand af "frie købmænd", som var berejste og orienterede om omverdenen. De bidrog utvivlsomt til at mesopotamiske, persiske og ægyptiske videnskabstraditioner blev kendt, om end ikke kopieret, i det joniske område. Denne udadvendte åbenhed betinget af manglen på en stærk centralmagt udgør det ene forklaringselement. Det andet er forbundet med det første. De joniske bystater er påfaldende fri for en præsteklasse, som oldtidens Grækenland i det hele taget var det. Det materielle grundlag for en sådan forelå vel simpelthen ikke, fordi samfundet kun i mindre grad var et landbrugssamfund afhængigt af en magtfuld naturs truende luner. I hvert fald blev disse samfund ikke præget af en religiøs kultur, og dermed heller ikke af dybt forankrede traditionsbestemte ideologier som spændte tankegangene inde i særlige rammer. At pythagoræerne, som jo havde et jonisk udspring, var et religiøst-mystisk broderskab ændrer for så vidt ikke ved denne konklusion. I opbygningen af broderskabets lære var der nærmere tale om at videnskaben blev religion, end om at religionen påvirkede videnskaben. Disse betragtninger giver nogle grunde til at grækernes matematik fik et så særegent filosofisk præg, den græske matematik begyndte som filosofi.

De tre berømte problemer

Som tidligere nævn er alt hvad der angår den joniske og pythagoræiske matematik, som den er beskrevet ovenfor, baseret på tredje- og fjerdehåndsmaterialer fra senere græske perioder. De ældste "autentiske" tekster fra græsk matematik er anden (tredje)hånds. De stammer fra Hippokrates fra den joniske ø Chios. Han levede omkring 430 f.v.t. og var oprindelig købmand. De tekstfragmenter der tillægges ham er bevaret gennem en sen afskrift foretaget af Simplikios ca. 520 e.v.t. fra Eudemos' matematikhistorie. Hippokrates beskæftigede sig med geometri, og skal have skrevet de første "Elementer". Han er kendt for at have arbejdet med en variant af et af de tre berømte problemer i græsk matematik, cirklens kvadratur, dvs. det problem ud fra en given cirkel at konstruere et kvadrat med samme areal. Vi skal nedenfor vende tilbage til dette og de to andre berømte problemer. Hippokrates kvadrerede ikke cirkler, men måner, dvs. figurer fremkommet ved to cirkelbuer med forskellige radier. Bl.a. fandt han at arealet af de to skraverede måner i figur



har samme areal som den skraverede trekant. Hans grundlag for at gøre dette var et resultat indeholdt i det fragment der tillægges ham: forholdet mellem (arealerne af) tilsvarende cirkeludsnit er det samme som forholdet mellem (arealerne af) kvadraterne over cirklernes diametre. Hvordan han nærmere beviste dette resultat (i følge Eudemos gav han et bevis), vides ikke men ved hjælp af det godtgøres kvadreringspåstanden således: vi har

$$\frac{\text{Areal halvcirkel over AC}}{\text{Areal halvcirkel over AB}} = \frac{(AC)^2}{(AB)^2} = \frac{1}{2}.$$

Da arealet af hver af de små halvcirkler dermed er lig halvdelen af arealet af den store halvcirkel, har de to halvcirkler til sammen samme areal som den store. Da endvidere de to uskraverede cirkelafsnit er fælles for de små og den store halvcirkel, må resten af arealerne være ens, dvs. de skraverede måners areal er lig trekantens areal.

Også en række andre månekvadreringer kendes fra Hippokrates' hånd. Selv om sofistikationsniveauet i Hippokrates' bevis-førelse ikke er kendt, er historikerne enige om at se ham som udøver af en deduktiv, dvs. bevisbaseret matematik (deduktion betyder udledning). Nogle har ligefrem set ham som ophavsmand til senere matematiklærebøgers så standhaftige skema: forudsætning, sætning, bevis.

Den første der skal have forsøgt sig med at kvadrere cirkler var den joniske filosof Anaxagoras, der i sidste del af sit liv levede i Athen, hvor han døde i 428 f.v.t. I begyndelsen var det næppe klart hvad man skulle mene med at konstruere et kvadrat af samme areal som en given cirkel, dvs. det var ikke klart hvilke konstruktionsteknikker der var "legale". På Euklids tid var det et etableret krav at konstruktionen skulle foregå alene med passer og lineal. Efter traditionen skulle det krav først være opstillet af Oinopides fra Chios (ca. 450 f.v.t.). Det er muligt at Platon og hans skole havde en væsentlig indflydelse på at kravet nød fremme. Det er fordringen om at konstruktionen skal foregå med passer og lineal, der siden har været en forudsætning når talen var om cirklens kvadratur, og de forgæves forsøg på at løse denne i gennem mere end 2000 år. Først i 1882 blev spørgsmålet afgjort. Ved hjælp af metoder fra et helt andet område, algebraen, blev det bevist at det med passer og lineal er umuligt at løse cirklens kvadratur. Derimod kan problemet godt løses, både teoretisk og praktisk, hvis man tillader andre hjælpemidler ved konstruktionen.

En sådan løsning nåedes allerede af den før-euklidiske Hippias fra Elis, der var samtidig med Sokrates (som døde 399 f.v.t.), og Deinostratos, som var et par generationer yngre. De betragtede en kurve som ikke kan frembringes med passer og lineal, men som kan tegnes med god tilnærmelse, den såkaldte trisectrix eller kvadratrix. Ved dens hjælp kan man bestemme siden i et kvadrat der har samme areal som en given cirkel, deraf navnet kvadratrix. Den kan også benyttes til at løse et andet af de berømte problemer, tredeling af en given vinkel. Deraf navnet trisectrix.

Det sidste af disse problemer angår fordoblingen af en given terning (s volumen), også kaldet det deliske problem. Opgaven er ud fra en forelagt terning at konstruere en anden terning med det dobbelte volumen. Navnet "det deliske problem" skyldes at der i følge en antik historie blev rettet henvendelse fra en pestramt by til oraklet i templet på øen Delos. Oraklet blev spurgt hvad der kunne gøres for at afvende pesten, og svarede at man skulle bygge templet et nyt alter dobbelt så stort som det gamle. Opgaven mislykkedes. I følge traditionen skal Hippokrates fra Chios have indset at terning fordoblingen kan føres tilbage til det at finde en såkaldt dobbelt mellemproportional mellem siden a i den oprindelige terning og i en terning med den dobbelte side 2a (altså et otte gange så stort volumen). At finde en sådan dobbelt mellemproportional vil nu sige at finde to linjestykker med længder x og y, så at $a:x = x:y = y:2a$. Hvis dette er opnået følger nemlig (i moderne notation), at $y^2 = 2ax$ og $ay = x^2$. Heraf fås videre at $\frac{x^4}{a^2} = y^2 = 2ax$, så at $x^3 = 2a^3$. Terningen med siden x har så det dobbelte volumen af den oprindelige. Ingen af disse problemer kunne grækerne løse med passer og lineal, og som for cirklens kvadratur blev umuligheden bevist ved algebraiske metoder i det 19. århundrede. Også til løsningen af det deliske problem havde grækerne metoder der ikke benyttede passer og lineal. Bl.a. har Archytas fra Tarent i Syditalien (han kaldes ofte den sidste pythagoræer, var født i 428 f.v.t., året før Platon) foretaget en sindrig konstruktion ved anvendelse af rumlige figurer, herunder omdrejningslegemer. Konstruktionen er interessant derved at den giver en korrekt løsning på problemet (men altså med "illegale" metoder), men ikke kun anvendes til teknisk/praktiske formål.

Eudoxos' proportionslære. Overgangen til den euklidiske periode

Den udvikling der førte græsk matematik fra inkommensurabilitetens og uendelighedsbegrebets dybe vand og ind til land indebar ikke en direkte løsning af problemerne men en omgåelse af dem. Denne udvikling kom til at finde sted i Athen, i tiden 450 f.v.t.-320 f.v.t., og i nær kontakt med Platon og hans skole Akademiet. Ikke fordi Platon selv leverede konkrete matematiske bidrag, det gjorde han vistnok ikke, men fordi han som en overmåde indflydelsesrig skikkelse skabte en ramme og et klima, hvor matematikken kunne udvikles i nær tilknytning til filosofien. Platon var selv godt bekendt med den nyeste græske matematik, bl.a. i kraft af en forbindelse med den tidligere omtalte Archytas, der var regent i Tarent, hvor Platon en tid opholdt sig på en længere rejse efter henrettelsen af Sokrates i 399 f.v.t. I flere af Platon's dialoger (Menon, Timaios, Theaitetos) diskuteres matematiske emner udførligt.

Platon's lærer og ven Theodoros fra Kyrene (aktiv omkring 390 f.v.t.) godtgjorde, uden at vi nøjagtig ved hvordan, at ikke bare $\sqrt{2}$, men også $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$ $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ og $\sqrt{17}$ er irrationale, selv om han ikke kan have formuleret sig sådan. Theodoros' elev Theaitetos (død 369 f.v.t.) der også var en ven af Platon, foretog mere dybtgående studier af inkommensurabilitet. Han opererede mellem forskellige grader af inkommensurabilitet. Der er, i vores sprogbrug, tale om at størrelser der indeholder kvadratrødder af kvadratrødder er mere irrationale end størrelser der kun indeholder ên kvadratrod. F.eks. er $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ mere irrational end $\sqrt{2}$. Theaitetos' arbejde danner antagelig grundlaget for behandlingen af disse anliggender i den 10. bog af Euklids elementer. Det menes også at Theaitetos gav et bevis (korrekt eller ej) for at der kun kan findes fem regulære polyedre (se tidligere).

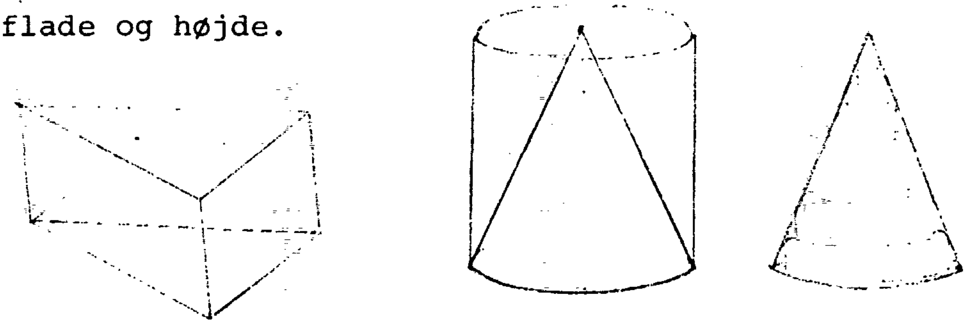
Det uden tvivl væsentligste bidrag til den videre udvikling skyldes Eudoxos fra Knidos (ca. 408-355 f.v.t.), som opholdt sig ved Platons Akademi. Det var hans indsats, med opbygningen af den såkaldte proportionslære, der gjorde det muligt at komme uden om inkommensurabilitets- og uendelighedsproblemerne. Proportionslæren, der senere dannede grundstammen i Euklid's femte bog, omhandlede generelle størrelser, der kunne være linjestykker, plane figurer, rumlige legemer osv., uafhængigt af om disse indeholdt inkommensurable størrelser eller ej. Udgangspunktet er, at størrelser kan lægges til sig selv et helt antal gange, dvs. multipliceres med et helt tal. Er f.eks. a et linjestykke er ma det linjestykke der fremkommer ved at lægge a m gange i forlængelse af sig selv. Størrelser der er af samme art kan sammenlignes med hinanden. At to størrelser er af samme art blev fastlagt til at betyde at den ene ved multiplikation kan bringes til at overstige, dvs. omslutte, den anden. Størrelser af samme art kan også indgå i forhold, proportioner, til hinanden. I en lidt anden rolle er dette gået over i matematikhistorien som Archimedes' aksiom (eller Archimedes lemma), der med behørig henvisning til Eudoxos gør flittig og dybsindig brug af det et par hundrede år senere. Eudoxos kunne nu definere hvad det vil sige at forholdet a:b af to størrelser a og b er det samme som forholdet c:d mellem to andre størrelser, c og d; nemlig at det for vilkårlige hele tal m og n gælder, at hvis ma < nb så er også mc < nd, hvis ma=nb så er også mc=nd, og hvis ma > nb da også mc > nd. Denne lidt uigennemskuelige, men overmåde dybsindige, definition kan gøres gældende over for hvilke som helst størrelser, kommensurable eller ej. Og endvidere, selv om a og b må være af samme art for at kunne indgå i proportion med hinanden, og det samme gælder c og d, behøver a,b på den ene side og c,d på den anden side ikke at være af samme art. F.eks. kan a og b være linjestykker, c og d terninger. I stedet for at diskutere sagerne ved hjælp af tal og sammenligning mellem sådanne repræsenterende, længder, arealer og rumfang, det som netop gav anledning til inkommensurabilitetsvanskelighederne, kunne de samme anliggender bahandles ved hjælp af forhold. Eudoxos opbyggede en tilfredsstillende aksiomatisk-deduktiv teori for disse forhold, der dels var righoldig nok til at finde svar på ikke-banale spørgsmål, dels undgik inkommensurabilitetens dybe vand.

Også uendelighedsproblemet kunne Eudoxos omgå ved hjælp af proportionslæren. Hans grundidé blev mere end 2000 år senere en central idé i den aksiomatiske opbygning af infinitesimalregningen som nåedes i slutningen af 19. århundrede. Idéen er at lade alle overvejelserne bygge på et aksiom, siden hen kendt som exhaustions-aksiomet (exhaustion:udtømning). Det optræder hos Euklid i nogenlunde denne skikkelse:

Hvis man fra en eller anden størrelse fjerner en del som mindst er halvdelen, og hvis man dernæst fra resten fjerner en del der mindst er halvdelen, og denne proces fortsættes, vil der fra et vist trin restere størrelser der alle er mindre end en hvilken som helst forud given størrelse af samme art.

På moderne kan aksiomet udtrykkes således: Hvis S er en størrelse (for os et positivt reelt tal), og d er et reelt tal (den andel der fjernes), $\frac{1}{2} \leq d \leq 1$ vil der altid til et givet $\varepsilon > 0$ findes et trin N, så at $S(1-d)^n < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Dette er det samme som at sige at $S(1-d)^n \to 0$ for $n \to \infty$. Selv om der her er tale om en grænseovergang, og dermed for så vidt om en uendelig proces, opereres der hverken med uendeligt små eller uendeligt mange størrelser. Både N,n og ε er endelige størrelser. Uendeligheden omgås gennem skemaet "for enhver... findes...", på en måde der ikke giver anledning til logiske problemer. På basis af exhaustionsaksiomet lykkedes det Eudoxos at give et helt tilfredsstillende bevis, også efter vore dages målestok, for en række sætninger vedrørende arealer og volumener. F.eks. den påstand Hippokrates tog afsæt i ved sine månekvadreringer, at forholdet mellem (arealerne) af to cirkler er det samme som forholdet mellem (arealerne af) kvadraterne over deres diametre. Kaldes i moderne notation cirkelarealerne A_1 og A_2, og deres diametre for d_1 og d_2, påstås altså at $A_1/A_2 = d_1^2/d_2^2$. Eudoxos viste, at hvis man antager at $A_1A_2 < d_1^2/d_2^2$ eller at $A_1 < A_2 \cdot (d_1^2/d_2^2)$, kan man finde en polygon indskrevet i cirklen med areal A_1 (og dermed med mindre areal end A_1) hvis areal er større end A_1. Denne modstrid er en følge af antagelsen om at $A_1/A_2 < d_1^2/d_2^2$, som derfor må falde. På tilsvarende måde gør Eudoxos det af med en antagelse om at $A_1/A_2 > d_1^2/d_2^2$. Tilbage står kun muligheden $A_1/A_2 = d_1^2/d_2^2$ som således er bevist.

Efter samme retningslinjer beviste han at volumenet af et tetraeder er en tredjedel af volumenet af et prisme med samme grundflade og højde, og at volumenet af en ret kegle er en tredjedel af volumenet af en cylinder med samme grundflade og højde.



Dette resultat var i følge Archimedes tidligere nået af den joniske filosof og matematiker *Demokrit* (ca. 460-370 f.v.t., kendt som en af grundlæggerne af den atomistiske filosofiske skole). Han benyttede infinitesimale metoder, der imidlertid førte ham ud i paradokser á la Zenon's. Betragter man nemlig keglen som et legeme bestående af uendeligt mange uendeligt tynde cylinderskiver, vil *enten* alle cylinderskiverne have samme grundareal, men så har vi at gøre med en cylinder og ikke en kegle, *eller*, hvis cylinderskiverne har forskellige grundarealer, får man et legeme med spring fra lag til lag og dermed ikke en glat kegle. Selv om disse metoder altså ikke kunne gives en tilfredsstillende form hos grækerne, og dermed ikke vandt indpas i teoriopbygningen, kunne de dog bruges til at give et *bud* på hvad resultatet skulle være. Det var nemlig exhaustionsmetodens Achilleshæl, at den kun kan bruges til at *bevise* påstande, men ikke til at *finde frem* til dem. I den græske oldtid kom Archimedes til at beherske begge instrumenter i et virtuost samspil.

Med Eudoxos og hans elever står vi på overgangen mellem den før-euklidiske og den euklidiske periode. Til denne overgang hører også nogle bidrag fra Platons og Eudoxos' efterfølgere til diskussionen om den rette fremstilling af matematiske tekster. Det er dem vi skylder fremstillingen af geometriske konstruktionsproblemer i en analysedel og en syntesedel. I *analysen* tænker man sig opgaven løst, og drager heraf (logiske) slutninger om hvad der nødvendigvis må gælde. Det indskrænker mulighederne til en eller nogle få. I *syntesen* undersøges så hvilke af mulighederne, om nogen, der faktisk løser det stillede problem, og dette bevises så. Analysen tjener til at finde konklusionen, syntesen til at godtgøre den. For en fyldestgørende fremstilling af hvad der gælder, er i og for sig kun syntesen nødvendig. Heraf kommer det navn som siden er blevet brugt om fremstillingen i Euklid's og beslægtede geometritekster, den syntetiske geometri.

Af beskrivelsen af den før-euklidiske matematik givet ovenfor, skulle det fremgå, at overgangen til den næste periode, den euklidiske, er glidende, eller anderledes sagt, at den euklidiske indsats ikke er faldet ned fra himlen, men henter sine forudsætninger fra lang og besværlig udvikling gennem mange hundrede år.

DEN EUKLIDISKE PERIODE

Euklid

Hvor den græske matematik vi hidtil har omtalt havde hjemsted først i Lilleasien og i kolonierne i Syditalien og siden i Athen, blev centret for resten af den antikke periode forskudt til Alexandria i Ægypten. Derfor benævnes denne periode ofte den "alexandrinske".

Baggrunden for dette skift lå i de store forandringer som fandt sted i de græske og i de øvrige antikke samfund i løbet af 300-tallet f.v.t. Svækket af mange års borgerkrige mellem de forskellige bystater og af dertil knyttede politiske opbrud, blev det græske kerneland i 338 f.v.t. rendt militært over ende af det makedonske kongedømme under Filip. De græske bystater måtte underkaste sig makedonerne. Dermed forsvandt det græske bystatsdemokrati ud af antikkens historie. Filips søn og efterfølger Alexander(den Store) fortsatte hvor faderen slap og gennemførte i årene 334 til 323 f.v.t. en række erobringskrige, der gjorde ham til overhovede over et monarkistisk imperium som med tiden blev domineret af græsk administration og kulturel indflydelse. Imperiet strakte sig fra Grækenland over Lilleasien, Ægypten og Mesopotamien til Indien ved Indus. Efter Alexanders død brød riget som helhed sammen efter en række tronfølgekrige, og deltes i mindre dele, bl.a. mellem nogle af Alexanders generaler. Det babylonske område kom under kontrol af Seleukos (den I.) og hans efterfølgere seleukiderne; det ægyptiske områder blev overtaget af Ptolemaios den I. og hans efterfølgere ptolemæerne. Dette områdes residensstad Alexandria blev snart den hellenistiske verdens største by og dens videnskabelige og kulturelle centrum. Under Ptolemaios den II. grundlagdes en universitetslignende institution, Museion, der - ud over at være sin tids mest indflydelsesrige lærdomssæde, med professionelle ansatte videnskabsmænd - rummede antikkens mest omfattende bibliotek.

Den skikkelse hvis navn er blevet stående som varemærket for den græske matematiks guldalder, Euklid, virkede netop i Alexandria. Den sengræske matematikker Pappos taler ligefrem om ham som grundlægger af Alexandria-skolen. Om hans person og liv vides ellers ikke meget, ikke engang hans årstal er kendte. Man regner med at hans blomstringsperiode faldt under Ptolemaios den I., altså i tiden 306-283 f.v.t.

Euklids matematiske indsats var af en særlig karakter. Han skabte ikke først og fremmest nye resultater og teorier, men samlede og organiserede til et sammenhængende system væsentlige dele af den forudgående græske matematik i værket "Elementerne" - den første fuldt bevarede græske matematiske tekst. Der er ikke tale om et leksikon eller en håndbog, men om en teoretisk traktat, hvor der på basis af et beskedent antal grundbestanddele - nogle begreber og nogle egenskaber tillagt disse - sker en skridtvis opbygning af teorien lag for lag til et større fast sammentømret teoretisk bygningsværk. Derved føres løsningen af sammensatte problemer tilbage til løsningen af enklere. Grundbestanddelene i dette bygningsværk kaldes "elementer", hvoraf værkets titel. Opbygningen finder sted ved hjælp af logiske slutninger gennemført på temmelig skarpe præmisser og inden for snævre rammer for det tilladelige. "Elementerne" er også elementære i det forstand at ikke hele datidens (eller Euklids) matematiske fond var optaget i det, kun begyndelsesgrundene. Proklos sammenlignede deres rolle i matematikken med alfabetets rolle i skriftsproget.

Indholdet i de tretten bøger "Elementerne" består af er, som det flere gange er blevet nævnt i de forudgående afsnit, hentet fra de før-euklidiske århundreders bidrag fra mange forskellige matematikere. Disse bidrag har handlet om en række forskellige emner, herunder egenskaber ved geometriske figurer i planen, geometrisk algebra, proportionslæren, pythagoræisk talteori, inkommensurable størrelser, regulære polyedre m.m. Man kan måske sige det sådan, at Euklid skilte emnerne ad i deres bestanddele, sorterede dem efter deres indbyrdes begrebslige og logiske sammenhæng, og til sidst samlede dem på en ny måde, efter deres plads i det teoretiske hierarki. På nogle punkter har der så været huller som Euklid har udfyldt, på andre steder har omorganiseringen kaldt på nye eller bedre beviser, som det antages at Euklid for en stor del selv har leveret. Et citat fra Proklos kan belyse arten af Euklids indsats: "...sammenstillede "Elementerne", samlede mange af Eudoxos' sætninger og perfektionerede andre af Theaitetos, og bragte til indiskutabelt bevis ting som kun var blevet noget løseligere bevist af hans forgængere." Snarere end nyskabelser i kontant forstand repræsenterede "Elementerne" hvad man kunne kalde en <u>teorisanering</u>.

Værket har tjent som en art lærebog og referenceværk for etablerede og kommende matematikere, sikkert ved Museion. Som før omtalt var Euklids "Elementer" ikke det første værk af slagsen. Både Hippokrates fra Chios og en mand ved navn Leon skrev "Elementer" før Euklid, og måske har der eksisteret andre. De blev imidlertid alle slået så grundigt ud af Euklids, at intet af betydning er overleveret om dem. Euklid udkonkurrerede ikke blot sine forgængere, men på en måde også sine potentielle efterfølgere. "Elementerne" er udkommet i så mange udgaver og oversættelser, at kun meget få værker, såsom Biblen, har vundet større udbredelse. Helt op i dette århundrede har redaktioner af "Elementerne" tjent som lærebog<u>en</u> i matematik i skolen, f.eks. i England.

En sådan bog må besidde nogle særlige kvaliteter, og som før fremhævet har det da også været en kilde til gentagen undren og efterforskning hvordan den har kunnet frembringes. Af udredningen i de foregående afsnit af den før-euklidiske græske matematiks udvikling fremgik det, at Euklids "Elementerne" nok udgør et højdepunkt for, og den foreløbige afrunding af, denne udvikling, men at værket samtidig i høj grad beror på selve denne udvikling. Det forhindrer ikke at dybden og den relative endegyldighed af Euklids teorisanering er forbløffende, også selv om der kan findes skavanker og rettes indvendinger mod værket. Disse indvendinger går først og fremmest på at der ikke så sjældent benyttes uudsagte forudsætninger eller resultater, og på at fremstillingen ikke alle steder følger et lige naturligt forløb. Men egentlige fejl findes der næsten ingen af. Ikke før i slutningen af sidste århundrede fik man midler til at stable en moderne afløser af "Elementerne" på benene. Det skete med David Hilbert's "Grundlagen der Geometrie" fra 1899. Indtil da havde Euklids geometri og traditionen efter ham givet anledning til mængder af matematiske udfordringer og radikale nyudviklinger. Noget af dette vil vi vende tilbage til senere i denne bog.

Dette er ikke stedet til en detaljeret gennemgang af "Elementerne", som gennem tiderne har været genstand for et utal af analyser, kommentarer og lærde disputter. Den internationale standardudgave er T.L.Heath's engelske baseret på en oversættelse fra danskeren J.L.Heibergs (ikke æsteten Heiberg, men de skriftkloges autoritet på græske matematiske tekster) tekstkritiske udgivelse af den græske tekst. Heath' udgave er på 1400 tættrykte sider, hvoraf højst 600 sider udgøres af Euklids tekst. Vi lader os nøje med en mere komprimeret antydning af indholdet i værket.

De første fire bøger handler om plangeometri, og der behandles kun spørgsmål som ikke kræver betragtninger og resultater fra proportionslæren. For at opnå dette må Euklid sno sig en hel del. F.eks. giver han et særegent bevis - formentlig af egen tilvirkning - for den pythagoræiske læresætning. Værket starter med en række definitioner af de begreber der vil blive brugt. De vigtigste af dem er:

1. Et punkt er det som ikke har nogen del.
2. En linje er en længde uden bredde.
3. En linjes yderligste ting er punkter.
4. En ret linje er en linje som ligger jævnt med punkterne på

den selv.

5. En flade er det som kun har længde og bredde.
7. En plan flade er en flade som ligger jævnt med de rette linjer på den selv
8. En plan vinkel er bøjningen fra den ene til den anden af to linjer i en plan som skærer hinanden og ikke ligger inden for en ret linje.
9. Og når linjerne som indeholder vinklen er rette kaldes vinklet retlinjet.
lo. Når en ret linje står på en ret linje så at de tilstødende vinkler er lig hinanden, er enhver af de ens vinkler ret, og den rette linje der står på den anden kaldes vinkelret på den som den står på.
11. En stump vinkel er en vinkel som er større end en ret vinkel.
12. En spids vinkel er en vinkel som er mindre end en ret vinkel.
14. En figur er det som er indeholdt af en hvilken som helst rand eller rande.
15. En cirkel er en plan figur indeholdt ef én linje sådan at alle rette linjer som falder på den fra ét punkt blandt dem som ligger inden for figuren er lig hinanden.
16. Og dette punkt kaldes cirklens centrum.
17. En diameter for en cirkel er enhver ret linje trukket gennem centrum og afsluttet i begge retninger af cirklens periferi, og en sådan ret linje tvedeler cirklen.
19. Retlinjede figurer er dem som indeholdes af rette linjer, hvor tresidede figurer er dem indeholdt af tre, firsidede dem indeholdt af fire og mangesidede dem som indeholdes af mere end fire rette linjer.
2o. Af trekantede figurer er en ligesidet trekant én som har sine tre sider ens, en ligebenet trekant én som kun har to af sine sider ens, og en uligesidet trekant én som har sine tre sider indbyrdes forskellige.
21. Videre, af tresidede figurer er en retvinklet trekant én som har en ret vinkel, en stumpvinklet trekant én som har en stump vinkel, og en spidsvinklet trekant én hvis tre vinkler er spidse.
23. Parallelle rette linjer er rette linjer som, liggende i samme plan og forlængede ubegrænset i begge retninger, ikke skærer hinanden i nogen af retningerne.

Det ses at der ikke er tale om definitioner i moderne forstand, men om tværtimod om fatslæggelsen af nogle udefinerede begreber, som til brug for intuitionen om hvad det hele går ud på forsøges indkredset. De spilleregler disse (u)definerede begreber er underlagt fastlægges nu af Euklid til at være følgende lo:

Postulater

Lad følgende være postuleret
1. At trække en ret linje fra ethvert punkt til ethvert punkt.

2. At forlænge en endelig ret linje ubegrænset i en ret linje.
3. At beskrive en cirkel med ethvert centrum og enhver radius.
4. At alle rette vinkler er lig hinanden.
5. At, hvis en ret linje, der skærer to rette linjer, har de indvendige vinkler på samme side mindre end to rette vinkler, skærer de to rette linjer, hvis de forlænges ubegrænset, hinanden på den side hvor vinklerne er mindre end to rette vinkler. (Dette postulat går under navnet "Parallelpostulatet")

Almene grundprincipper

1. Ting som er lig med den samme ting er også lig med hinanden.
2. Hvis lige store størrelser lægges til lige store størrelser, er størrelserne til sammen lige store.
3. Hvis lige store størrelser subtraheres fra lige store størrelser er de tilbageblevne størrelser lige store.
4. Ting som er sammenfaldende med hinanden er lig med hinanden.
5. Det hele er større end delen.

Hermed er grunden lagt til udviklingen af plangeometrien. Bog I handler om plangeometriens basis, rette linjers skæring, vinkler, trekantsgeometri, herunder kongruenslære, parallelle linjer og parallellogrammer. Bog II handler især om sådanne geometriske sætninger der fremstiller algebraiske identiteter. Desuden om nogle foregribelser af trigonometriske anliggender. Det antages i almindelighed at disse to bøger hovedsagelig fremlægger pythagoræisk materiale. I bog III og IV, der formodes at gå tilbage til Hippokrates, behandles cirkler og cirkeludsnit, tangenter, figurer ind- og omskrevet i cirkler.

Den femte bog fremstiller Eudoxos' proportionslære, herunder exhaustionsmetoden, der dog ikke udmøntes som en generel metode hvilende på én sætning, men gentages fra grunden ved hver ny anvendelse. En del af de resultater der findes i de fire første bøger genbehandles og generaliseres i bog V. En af de sætninger der bevises i bogen er, at kvadratet har størst areal blandt alle rektangler med en given omkreds. Man har undret sig over at Euklid ikke fra begyndelsen indarbejdede proportionslæren i bog I-IV, hvor den havde været velanbragt. Zeuthen fremsætter den formodning, at Eudoxos' arbejder endnu var af så ny dato at de ikke var tilstrækkeligt fordøjet til at gennemsyre fremstillingen i bog I-IV, da disse blev skrevet. I bog VI anvendes proportionslæren på kongruenser og ligedannethed i planen. Derefter skiftes emne. I bøgerne VII-IX behandles pythagoræisk talteori, altså kommensurable størrelser. Euklids algoritme til udfinding af den største fælles divisior mellem to tal, og et bevis for at der findes uendeligt mange primtal findes i disse bøger. I bog VII præsenteres nogle sætninger hvis udsagn er specialtilfælde af mere generelle sætninger vist i bog V, og dermed for så vidt overflødige. Dette kan (med Zeuthen) ses som endnu et udtryk for bog V's relativt isolerede stilling i værket, og for at bog VII indeholder forholdsvis ældre stof. Den sidste del af bog IX danner sin egen lille helhed og er på sin vis uafhængig af resten. Man (Szabó) har foreslået at den er overtaget fra en anden euklidisk lærebog.

Theaitetos' irrationalitetsteori danner grundstammen i bog X, den vanskeligst tilgængelige af "Elementerne"'s tretten bøger. Nogle af vanskelighederne skyldes utvivlsomt manglen på et bekvemt symbolsprog der tillader overblik over de stærkt sammensatte begreber (jfr. omtalen i de foregående afsnit af Theaitetos' arbejde). Der er tradition - bl.a. hos Proklos - for at tillægge Euklid færdiggørelsen af Theaitetos' teori. Den redegørelse for at siden og diagonalen i et kvadrat er inkommensurable, som findes i en tilføjelse (et scholium) til bog X, skyldes efter alt at dømme ikke Euklid selv, men en senere tids bidrag, måske fra Apollonios som siden skal omtales. Men beviset som sådan er ikke senere. Det findes hos Aristoteles. En af de mere specielle ting der behandles i den tiende bog er spørgsmålet om hvorvidt rødderne i et 2.gradspolynomium (i moderne formulering) er kommensurable med koefficienten til 1.grads-leddet, et spørgsmål der kan forekomme overraskende idet rødderne i alle tilfælde (når de eksisterer) kan konstrueres eksplicit ud fra den geometriske algebra. Heath giver det bud, at grækerne faktisk var mere interesserede i numeriske forhold end deres overleverede traktater normalt lader ane.

I bøgerne XI-XIII vendes der atter tilbage til egentligt geometriske problemstillinger, men nu inden for rumgeometrien. I bog XI lægges grunden, definitioner og aksiomer præsenteres. I bog XII benyttes proportionslærens exhaustionsmetode til at frembringe resultater om figurmålinger. Rumgeometriens clou er behandlingen i bog XIII af de regulære polyedre, også kaldet de platoniske legemer. Det bevises at der netop findes fem sådanne, og deres nærmere egenskaber, f.eks. størrelsen af forskellige linjestykker og vinkler, bestemmes. Disse bestemmelser er måske udført af Euklid selv. Grundstammen i bogen tillagdes i øvrigt af den græske tradition Theaitetos.

I oldtiden opererede man med at endnu to bøger om regulære polyedre hørte til "Elementerne", og mange senere udgaver havde disse bøger med. Det er siden blevet godtgjort at de ikke er skrevet af Euklid. Den ene af dem ("bog XIV") er antagelig blevet til i århundredet efter Euklid, og bringer en fortsættelse af "Elementerne". Den "femtende bog" er langt senere og indeholder mere primitivt materiale end "Elementerne"'s.

Omend Euklids "Elementer" er det ældste komplette værk overleveret fra græsk matematik, er overleveringshistorien kroget, stedvis afbrudt, og i hvert fald indviklet. Årsagen til det er for det første, at teksten forsvandt sent i oldtiden, og for det andet at der fra det 3. århundrede e.v.t. skete en del tilføjelser og ændringer i Euklids tekst. Et af de sejlivede resultater af sådanne omarbejdninger blev skrevet af en vis Theon (4. årh. e. v.t.). Afskrivning og opbevaring af "Elementerne" gik for sig i det byzantinske rige og senere i den tidlige middelalders vesteuropæiske klostre. Men til matematisk virksomhed blev de ikke benyttet i denne periode. De havde derfor heller ingen udbredelse uden for arkiverne. De ældste græsksprogede manuskripter er fra perioden 9.-12. årh., men de fleste bygger på Theons version. Den mest pålidelige tekst - den der ligger til grund for Heibergs udgave - anses for at være det såkaldte Vatikan-manuskript fra det 10. årh. Disse græske tekster er først på et langt senere tidspunkt kommet til at danne grundlag for Euklid-udgivelser.

Der var imidlertid en anden kilde, nemlig arabiske Euklid-oversættelser. I det 8. århundrede fik arabiske sendebud fra kaliffen overdraget eksemplarer af "Elementerne" i hoffet i Byzans. De blev oversat til arabisk i flere omgange i 800-tallet, og i de følgende århundreder fremkom mangfoldige oversættelser, bearbejdelser og kommentarer på arabisk. Før Heiberg mente flere forskere, at den arabiske Euklid-tradition havde bevaret en mere autentisk tekst end de senere græske manuskripter. Men efter Heiberg er dette ikke længere den herskende opfattelse. Det var gennem de islamiske araberes almindelige stimulering til genoptagelsen af matematiske aktiviteter, at Euklid blev genopdaget i Europa i middelalderen. De Euklid-udgaver som kom til den lærde verdens kendskab var ikke baseret på de omtalte græske manuskripter, men på latinske oversættelser i det 12. århundrede (Æthelhard fra Bath, og især Gherardo fra Cremona) fra arabisk. Men der findes vidnesbyrd om at man godt kendte eksistensen af græsksprogede manuskripter på den tid.

Den første trykte udgave af "Elementerne" - også på latin oversat fra arabisk - udkom i Venezia i 1482, og derefter hurtigt i nye udgaver. En latinsk udgave baseret på et græsk manuskript af theon'sk type udkom i 15o5, mens den første græske udgave - editio princeps - baseret på et tekstligt set ret ringe manuskript kom i 1533. I de følgende århundreder udkom stadig bedre udgaver, indtil den (foreløbigt) endelig udgave, Heibergs, udsendtes i årene 1883-1916.

Euklids navn er frem for alt forbundet med "Elementerne". Men faktisk skrev han en hel del mere, hvoraf dog det meste er gået tabt, således værker om musik, astronomi og mekanik. Bevaret - både på græsk og arabisk - er "Data", der fremlægger undersøgelser i tilknytning til "Elementerne", nemlig sådanne hvor det vises, at hvis bestemte størrelser er givne så er også visse andre størrelser givne. Zeuthen betegner disse resultater som analytiske hjælpemidler for "Elementerne", hovedsagelig de seks første bøger. Ligeledes bevaret er "Deling af figurer" (i en arabisk oversættelse), "Fænomenerne" og "Optik". "Elementerne" kan siges at handle om geometrien af det rum hvori fysiske fænomener udspiller sig. Dette rum er tredimensionalt, uendeligt i alle retninger, ens på ethvert sted (homogent) og ens i alle retninger (isotropt). Det er en geometri som egner sig til at beskrive flytningen af legemer der lades uforandret af flytningen. Et sådant rum kaldes i dag netop "euklidisk". Den ramme for forståelsen af det fysiske rum som Euklids "Elementer" leverer, egner sig ikke uden videre til at beskrive synets geometri, der jo er underlagt perspektiviske virkninger. For synet får én og samme genstand forskellig størrelse i billedet alt efter hvor langt den er væk fra betragteren. For at beskrive synets geometri må man vælge en anden ramme end "Elementerne"'s (selv om det faktisk er muligt at bygge på deres grundlag). Det er det der er på tale i "Optik", som nærmest er en perspektivlære.

EUKLIDS EFTERFØLGERE

Betegnede Euklids arbejde højdepunktet i klarlæggelsen og fremstillingen af teorigrundlaget for den senere matematiske udvikling, er der så langt fra tale om at det derefter gik ned ad bakke for græsk matematik. Tværtimod nåedes der i de følgende århundreder nye højdepunkter hvad resultater angik, med afsæt i Euklids og hans forgængeres indsats.

Archimedes

I Syrakusa på Sicilien, men i kontakt med centret i Alexandria, arbejdede Archimedes (ca. 287-212 f.v.t.), der nok var lidt yngre end Euklid, og som af mange er blevet kaldt oldtidens største matematiker. Hans virksomhed var flerdelt.

Først og fremmest fortsatte han i det euklidiske spor, hvor han under suveræn beherskelse af "Elementerne"'s begrebsapparat og teknikker, frem for alt exhaustionsmetoden, indlemmede nye områder i det euklidiske matematikunivers. Blandt de objekter han studerede var visse kurver der ikke hidtil var blevet undersøgt med euklidiske metoder, såsom parabler, ellipser, hyperbler, spiraler m.m., og navnlig områder begrænset af stykker af sådanne kurver. Ved hjælp af uangribelige og overmåde skarpsindige exhaustionsbeviser bestemte han arealet af et parabelsegment (i "Parablens kvadratur"), ellipsens areal (i "Om konoiden og sfæroiden"), og arealer i tilknytning til den "archimediske spiral", som han også anvendte til vinkeltredeling. Gennem udregninger (i "Om målingen af cirkler") af arealerne for regulære 2n-kanter (for $n = 3$ til 43) indskrevet og omskrevet i en cirkel, gav han antikkens bedste tilnærmelse til π:
$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ $(= \frac{22}{7})$.

Rumgeometriske forhold behandlede han bl.a. i "Om kuglen og cylinderen", hvor kuglens overfladeareal bestemtes som fire gange arealet af en storcirkel. Også overfladearealet af en kuglekalot, såvel som kuglens volumen lykkedes det ham at bestemme. Fælles for disse arbejder er at der inden i og uden om de betragtede områder lægges polygoner eller andre velkendte områder. Ved stadig bedre tilnærmelser med sådanne områder ("over- og undersummer") benyttedes exhaustionsmetoden til at bevise at det betragtede areal eller volumen må have en bestemt værdi. Opbygningen og fremstillingsformen er som hos Euklid, aksiomatisk deduktiv. Uden at der på nogen måde er tale om egentlig regning med grænseværdier, er princippet i Archimedes' fremgangsmåde næsten identisk med princippet i senere tiders integralregning.

Vi har tidligere været inde på at brugen af exhaustionsmetoden sædvanligvis kræver et bud på hvad den søgte værdi er. Det var længe en gåde hvorfra Archimedes fik disse bud. Men i 1906 fandt Heiberg i Istanbul et hidtil ukendt Archimedes-manuskript, "Metoden", hvor Archimedes i breve til Erathostenes i Alexandria fortæller om sin fremgangsmåde til at finde disse værdier. Det fremgår heraf at han nåede resultaterne ved at balancere figurer samlet af tynde linjer mod hinanden på en vægtstang.

Dette bringer os til den anden af Archimedes' indsatser. Bøgerne "Om ligevægt af planer" og "Om flydende legemer" er traktater om matematisk fysik, hvor netop ligevægtsproblemer, tyngepunktsbestemmelser, hydrostatik ("når et legeme nedsænkes i vand ...") osv. står i centrum. Også her nås resultaterne ved hjælp af exhaustionsmetoden og fremstillingen er aksiomatisk-deduktiv.

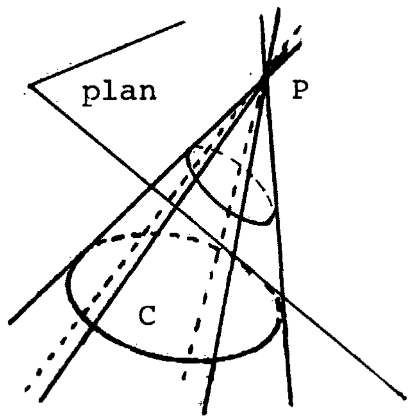
På sin egen tid var Archimedes berømt for en tredje virksomhed, som civil- og militæringeniør. Men flere antikke forfattere bemærker at han ikke selv tillagde disse gøremål nogen vægt - ja at han nærmest så ned på dem, og at der i hvert fald ikke var tale om noget samspil mellem dem og hans teoretiske grundforskning.

I en lang periode, fra senantikken til middelalderen, var næsten ingen af Archimedes' værker kendt. Også for ham er overleveringshistorien bugtet. Flere af værkerne blev oversat til arabisk. Overlevelsen til nyere tid beror i øvrigt på græsksprogede 15oo-tals kopier af ældre græske manuskripter fra 9.-1o. århundrede.

Apollonios

I centrum af den euklidiske tradition, og med tilknytning til Alexandria, virkede også Apollonios fra Perga, der med de tænkelige årstal 262-19o f.v.t. var lidt yngre end Archimedes. Ud over om matematiske emner har han også skrevet om astronomiske spørgsmål af geometrisk natur. Man kender gennem senere græske matematikere, især Pappos (ca. 32o e.v.t.), titlerne på og noget af indholdet i hans matematiske skrifter, som alle handlede om geometri. På nær to, "Afskæring af et areal" og "Keglesnit", er de gået tabt.

Det værk han først og fremmest er kendt for er "Keglesnit", der i manuskripter fra 12. og 13. årh. på græsk (bog I-IV) og arabisk (bog V-VII) er overleveret til eftertiden (en ottende bog er gået tabt). En samlet oversættelse til latin fremkom i Europa i 171o. En kegle er en flade der frembringes af alle linje som går gennem et bestemt punkt P i rummet og et punkt på en given cirkelperiferi C (se figuren). Apollonios studerede de figurer der fremkommer ved at en sådan kegle skæres med en vilkårlig plan. Det er disse snitfigurer (kurver), der kaldes keglesnit.



Afhængigt af hvordan planen ligger i forhold til keglen bliver snitkurven enten en cirkel, en ellipse, en parabel eller en hyperbel, navne som Apollonios indførte på dem. Keglesnit var tidligere blevet behandlet i græsk matematik (bl.a. af Platons samtidige Menaechmos), men Apollonios nåede langt videre. Med strenge beviser på "Elementerne"'s grund, og i deres verbale stil, leverede han en overmåde grundig, nærmest komplet udgravning af keglesnittenes egenskaber. For eftertiden har "Keglesnit" da også stået som en stort set fuldstændig traktat om sit emne, der kun behøvede få tilføjelser, og omskrivning til senere tiders sprogbrug. I den nyere tids matematik fremstilles keglesnittene ved hjælp af ligninger der refererer til et koordinatsystem i planen. Det var tæt på at Apollonios' arbejde havde ført til indførelsen af sådanne analytisk geometriske synsmåder på keglesnittene, og til analytisk geometri i det hele taget. Man (Boyer) har set en årsag til at det ikke skete i det tunge apparat, som den symbol- og formelløse geometriske algebra udgjorde.

Den euklidiske guldalderperiode sluttede tilsyneladende med Apollonios. I hvert fald kendes næsten ingen oldtidsværker i den euklidiske tradition efter hans tid, hvilket dog ikke betyder at den græske matematik går til grunde hermed. Et efterspil får traditionen med den sengræske matematiker Pappos (ca. 32o e.v.t.), der virkede i Alexandria, som på den tid var under det romerske kejserriges herredømme. I det eneste overlevende værk fra hans hånd "Synagoge" (betyder "samling") leverer Pappos forskellige tilføjelser til, og generalisationer og udvidelser af stof fra "Elementerne" og omegn. F.eks. viser han at cirklen har større areal end alle regulære polygoner med samme omkreds. I de sidste af værkets otte bøger behandles anvendelsen af matematik på astronomi, optik og mekanik, og der gives matematikhistoriske oplysninger som ikke kendes fra andre kilder.

DEN EFTER-EUKLIDISKE PERIODE. ANVENDT MATEMATIK I DEN GRÆSKE OLDTID

Alt hvad der hidtil har været omtalt af græsk matematik har angået, hvad der siden er blevet kaldt opkomsten af matematik som videnskab. Vi har set at denne opkomst er nært forbundet med opkomsten af en naturfilosofi uden mytologiske forankringer, og at dens interesse først og fremmest rettede sig mod erkendelse. Nærmere bestemt var hovedbestræbelsen for denne tradition i græsk matematik at undersøge rent geometriske spørgsmål på et krævende aksiomatisk-deduktivt grundlag. Og det er i høj grad disse bestræbelser og deres succes der har skabt den græske matematiks ry i matematikhistorien.

Det skal imidlertid ikke overses, at der også fandtes et andet spor i den græske oldtids matematik, et spor som i højere grad så det som sin opgave at udnytte matematiske overvejelser til formål uden for matematikken selv, f.eks. til naturbeskrivelse (navnlig sngående astronomiske og fysiske forhold), men også til mere regelret praktiske formål. Nogle af aktørerne i dette spor var også aktive i den euklidiske tradition, f.eks. Archimedes og Apollonios.

Vi lægger ud med en kort omtale af

Grækernes talsystem

Selv om grækerne i deres udvikling af matematikken som videnskab nærmest opgav tallene som grundlag for en beskrivelse af verden, kunne de trods alt ikke undvære dem til dagligdags formål i handel, håndværk m.m.m. Der var da også kun tale om positive hele tal og rationale tal (brøktal). Alligevel springer det i øjnene hvor primitiv den klassiske græske logistik, regnekunst, var, dels i sammenligning med den øvrige græske matematik men også med den babylonske regnekunst. De vedholdende angivelser i græske tekster om at grækerne lærte matematik fra ægypterne, handler måske om logistikken, som har mange mindelser om ægyptisk regnekunst.

Grækernes talsystem havde grundtallet lo, men var ikke positionelt. Faktisk var der to talsystemer i brug, i hvert fald i begyndelsen. De anses for at være udviklet nogenlunde samtidigt, i perioden 8oo-5oo f.v.t.

I det attiske talsystem, som muligvis har de ældste rødder, noteredes tallene 1,2,3 og 4 med lodrette streger |, ||, |||, ||||, mens tegnene for 5,lo,loo,looo og loooo noteredes med det første bogstav i hvert af ordene for disse:

5: Π (af pente), i en ældre form ses Γ
lo: Δ (af deka)
loo: H (af hekaton)
looo: X (af chirioi)
loooo: M (af myrioi (myriade))

Der er altså ikke særlige tegn for 6,7,8,9. De dannes som alle andre tal ved kombination af de nævnte tegn. Man kan heri se en rest af et femtalssystem. Tallet 7 noteredes således: Γ||. Tallene 5o og 5oo ved Γ_{Δ} og Γ_{H}. Tallet 7932 ville blive skrevet:

Γ_X XX Γ_H HHHH ΔΔΔ ||
svarende til 5ooo + 2·1ooo + 5oo + 4·1oo + 3·1o + 2·1.

Det joniske system, som fra 2oo-tallet blev enerådende, er et rent 1o-talssystem, uden femtalsrester. Det er baseret på det græske alfabet i en gammel skikkelse, dvs. en skikkelse med tre tegn, henholdsvis digamma, koppa og sampi, der er markeret ved *, som ekstra tegn:

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
Α	Β	Γ	Δ	Ε	Γ*	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1o	2o	3o	4o	5o	6o	7o	8o	9o

ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	ϡ*
1oo	2oo	3oo	4oo	5oo	6oo	7oo	8oo	9oo

I begyndelsen havde man kun de store bogstaver, de små hører en lidt senere tid til. Når det gjaldt større tal end 9oo begyndte man forfra på alfabetet, men satte et mærke foran:

,Α	,Β	,Γ	,Δ	,Ε	,Γ	,Ζ	,Η	,Θ
1ooo	2ooo	3ooo	4ooo	5ooo	6ooo	7ooo	8ooo	9ooo.

I det joniske system ville tallet 7932 se sådan ud: ,Ζϡ ΛΒ. Tal over 1oooo, en myriade, blev skrevet ved tilføjelse af tegn for det antal myriader der var tale om, enten over M, tegnet for en myriade i det attiske system, eller efter resten af tallet, adskilt ved en prik. F.eks.:

4oooo: $\overset{\Delta}{\mathrm{M}}$ $\overset{4}{(\text{1oooo})}$, 12oooo: $\overset{\mathrm{IB}}{\mathrm{M}}$ $\overset{12}{(\text{1oooo})}$, 1234567: $\mathrm{M},\underbrace{\Delta\Phi\Xi\mathrm{Z}}_{4567}\cdot\underbrace{\mathrm{PK}\Gamma}_{123}$

Når man havde brug for at skelne talangivelser fra ord satte man streg over. Selv om i det joniske system en bestemt plads angiver en bestemt 1o-potens (talt fra højre som hos os), er systemet alligevel ikke, som heller ikke det beslægtede ægyptiske, et positionssystem, fordi man skiftede til nye tegn ved overgangen til nye 1o-potenser.

Grækernes brøksystem var i den sammenhæng der her er tale om, centreret om stambrøker, dvs. brøker med tælleren 1. De noteredes med et ' efter, f.eks. NB' for $\frac{1}{52}$ (af sammenhængen måtte det fremgå at der ikke var tale om $5\frac{1}{2}$). I den efter-euklidiske periode kom også andre brøker på tale, bl.a. sexagesimalbrøker. Nogle har ment at behovet for brøker til praktiske formål blev omgået ved at mål, vægt og mønt fandtes i så stort et antal enheder og underenheder, at man i praksis kunne klare sig uden megen brøkregning.

Selv om tilvænning til grækernes system selvfølgelig gør det nemmere at håndtere end det ved første øjekast ser ud til (Paul Tannery lærte sig at regne i det joniske system og fandt det ikke så rædsomt), var der alligevel tale om et meget besværligt system. Man går ud fra at systemerne først og fremmest blev brugt til at <u>præsentere</u> tal og resultater i, mens selve regneoperationerne nok har været udført på en kugleramme, en abakus. Vi ved imidlertid ikke meget om sagen, fordi den ikke af grækerne blev fundet værdig til skriftlig omtale. Det er værd at bemærke, at det joniske system er blevet benyttet helt op i vor tid i Grækenland i administrative og juridiske tekster.

<u>Matematiske beregninger</u>

I arbejdet med astronomiske (herunder kalendermæssige) og geografiske spørgsmål lagde græske astronomer og matematikere grunden til en tidlig <u>trigonometri</u>. Den angik sammenhænge mellem buer og korder i én cirkel, men ikke, som senere trigonometri gjorde det, forhold mellem linjestykker i trekanter, og naturligvis slet ikke trigonometriske <u>funktioner</u> i moderne forstand. Men trigonometri var det lige fuldt. De første systematiske bidrag blev givet af <u>Erathostenes</u> fra Kyrene (276-194 f.v.t.) og <u>Aristarchos</u> fra Samos (310-230 f.v.t.) der begge tilhørte det alexandrinske universitet Museion. Ved hjælp af korrekte metoder, men på grundlag af gale observationer, bestemte Aristarchos forholdet mellem afstanden Månen-Solen og afstanden Månen-Jorden ved fuldmåne, mens Erathostenes fandt Jordens omkreds med stor nøjagtighed. <u>Hipparchos</u> fra Nikæa (180-125 f.v.t.) formidlede resultater - navnlig indholdsrige samlinger af måledata - fra den højtudviklede babylonske astronomi til den græske videnskabelige verden. Han producerede de første trigonometriske tabeller for korder i cirkler, altså essentielt sinus-tabeller. (sinus til vinklen v er jo numerisk lig den halve længde af korden spændende over 2v). Cirklen var inddelt i $36o^0$, og hver grad i 6o minutter, hvert minut i 6o sekunder. Omkring loo e.v.t. behandlede Menelaos trekanter dannet af storcirkelbuer på en kugleoverflade, de såkaldte sfæriske trekanter, og fandt trigonometriske resultater i tilknytning hertil, bl.a. en ækvivalent til "idiotformlen". Han indså at vinkelsummen i en sfærisk trekant overstiger $18o^0$.

Periodens trigonometriske hovedindsats blev ydet af Ptolemaios (ca. loo-165 e.v.t.), ikke at forveksle med de alexandrinske konger af samme navn. Denne indsats, der sikkert skylder meget til Hipparchos, findes i et værk på tretten bøger kendt under det arabiske navn "Almagest" (dets græske titel betyder "matematisk syntaks"), fordi det er overleveret til os på arabisk gennem den islamiske videnskabstradition. I dens første bog findes en tabel over kordelængderne for buer fra $\frac{1}{2}^0$ til $18o^0$, med skridt på $\frac{1}{2}^0$. Beregningerne bygger - gennem den såkaldte Ptolemaios' sætning (: i en firkant indskrevet i en cirkel er summen af modstående siders produkter lig produktet af firkantens diagonaler) - på hvad der kan fortolkes som en udgave af additionsformlen for sinus og på en formel for sin $\frac{v}{2}$. Kordeberegningerne førte til temmelig nøjagtige resultater angivet i enheder fra et 6o-talssystem, utvivlsomt inspireret fra Mesopotamien. Ved at opdele cirklen i 72o buer á $\frac{1}{2}^0$ tilnærmede Ptolemaios cirklens omkreds med omkredsen af en indskrevet regulær 72o-kant. Han fandt derved for π den tilnærmede værdi $\frac{377}{12o} \sim 3.14167$. Kordetabellen blev benyttet af astronomer gennem mere end tusind år.

I nogle af "Almagest"'s øvrige bøger er det såkaldte ptolemæiske verdensbillede beskrevet. Det forestiller sig Solen og planeterne i en særlig bevægelse rundt om Jorden, såkaldte epicykler. Det vil sige, at det enkelte himmellegeme bevæger sig i en cirkel rundt om et centrum der samtidig bevæger sig i en cirkel rundt om Jorden der sluttelig bevæger sig rundt om et punkt i universet. De involverede cirkelbevægelser er ikke jævne. Dette system var med bemærkelsesværdig nøjagtighed i stand til at reproducere himmellegemernes observede bevægelser, at "redde fænomenerne" som det hed siden Platon, hvilket nok var en væsentlig årsag til at det ptolemæiske system først blev erstattet af det moderne verdensbillede i 16oo-tallet efter svære videnskabelige og ideologiske kampe.

Ptolemaios' indsats vedrørte også geografi og kartografi. Han introducerede længde- og breddegrader til at koordinatlægge jordoverfladen, uden dog at værdien af længdegraderne på et givet sted kunne måles på hans tid. Han lavede kort baseret på den såkaldte stereografiske projektion af jordkuglen, og middelalderens tidlige kortproduktion havde hans kort som forbillede.

Den sengræske beskæftigelse med direkte naturbeskrivende og beregningsorienteret matematik, som Ptolemaios var den mest fremtrædende eksponent for, havde også andre udøvere, f.eks. Heron (o. loo e.v.t.), der i sine værker angiver en mængde numeriske eksempler på længde-, areal- og volumenberegninger, diverse regneregler og recepter, uden at skelne mellem tilnærmede og eksakte angivelser. I sig selv har disse og lignende bidrag næppe haft den store betydning for matematikkens udvikling, men de har haft indirekte betydning derved at deres anvendelsesnærhed gjorde dem interessante for de islamiske (og vist også de hinduiske) matematikere. Derved har disse bidrag dels hjulpet udviklingen af den islamiske kulturs betydningsfulde matematiske tradition, dels åbnet denne traditions interesse for at udnytte og bevare andre, og måske væsentligere, værker fra det euklidiske spor i den græske matematik.

Sengræsk aritmetik og algebra

Uden for den græske matematiks geometriske hovedlandevej finder vi, i sidste del af den alexandrinske periode, en aritmetisk-algebraisk sidevej. Ud over i emnet var denne sidevej forskellig fra den geometriske tradition, og navnlig fra den euklidiske, i sin tankegang, som i mangt og meget lå den babylonske algebra nær.

Omkring loo e.v.t. skrev i Alexandria Nichomachos fra Gerasa en introduktion til aritmetikken. Bogen beskæftiger sig med talteori af pythagoræisk type for naturlige og rationale tal, med hovedvægt på multiplikations- og delelighedsspørgsmål, primtal, trekants-, firkants- og polygonaltal m.v. på en rimeligt systematisk måde, men helt uden forankring i geometri. Den blev et standardværk i aritmetik, bl.a. for araberne, helt op i middelalderen.

Periodens vigtigste algebraiske indsats blev ydet halvandet hundrede år senere af alexandrineren Diophantos (ca. 25o e.v.t.?), af hvis hovedværk "Arithmetica" seks ud af tretten bøger er overleveret i et græsksproget manuskript fra 12oo-tallet. Også Diophantos arbejdede udelukkende med naturlige og rationale tal. Som hos Nichomachos er de uden reference til geometriske kilder, men også til praktiske opgaver. Værket handler om løsning af ligninger. I det studeres diverse ligninger og ligningssystemer af 1., 2. og 3. grad (men der arbejdes også nu og da med højere potenser) i én eller flere ubekendte. Der er ikke bare tale om ligningsproblemer med entydigt bestemte løsninger, men også med ubestemte problemer, hvor der er flere, f.eks. uendeligt mange løsninger. Som nævnt søges kun heltallige eller rationale løsninger, og kun eksakte løsninger. Ligninger med udelukkende irrationale løsninger klassificeres af Diophantos som uløselige, uden at han interesserer sig for tilnærmede løsninger. Det peger på at hans æringe ikke var af praktisk beregningsmæssig natur, men "rent algebraisk".

Bogen er opbygget af en række enkeltproblemer, hvor de kendte størrelser er konkrete tal, ikke almene konstanter. Problemerne løses efter hver sin metode, gerne i babylonsk stil. Der er ingen bestræbelser på at undersøge problemtyper eller på at opstille generelle metoder. Ud over i behandlingen af ubestemte ligninger er Diophantos original ved som den første at indføre symbolsk notation ved opgavernes behandling. Af bl.a. den grund er han ofte blevet kaldt algebraens fader. Han indførte tegnet ς (en variant af det græske bogstav sigma) for den ubekendte, symbolerne Δ^Y og K^Y angiver henholdsvis 2. og 3. potenser, mens tegnet ⋔ står for subtraktion.

Sidste bemærkninger om græsk matematik

Vi har nu afsluttet behandlingen af græsk matematik og af antikkens matematik i det hele taget. I tiden indtil middelalderen og renæssancen er matematisk virksomhed af betydning henlagt til scener uden for Europa, i Kina, i Indien og i den islamisk-arabiske kultur. Navnlig den sidstnævnte fik betydning for den genopblomstring og påfølgende accellererede udvikling af matematikken der fandt sted i Europa fra og med renæssancen. Det er ikke overkommeligt her at give nogen indgående omtale af de orientalske kulturers matematiske indsats, uagtet dennes interesse og værdi. Vi kan kun fiske et par hovedpunkter fra dette store stof. Før vi i næste afsnit kaster garnet ud vil vi se lidt nærmere på de forhold der bevirkede, at den græske matematiske tradition ikke kom til at spille nogen rolle for det romerske og for det førmiddelalderlige kristne Europa.

Det græske kerneland kom under romersk herredømme i 146 f.v.t. efter en længere ustabil og konfliktmættet periode. Det af det ptolemæiske dynasti styrede Ægypten, herunder Alexandria, blev erobret i 31 f.v.t., hvilket betød at periodens væsentligste lærdomscenter kom under romersk jurisdiktion (for resten afbrændte Cæsar museets bibliotek i 47 f.v.t.). Som vi har set vedblev der i nogle hundrede år endnu at være videnskabelig og matematisk aktivitet. Museet blev, som Alexandria i det hele taget, raseret ved en muslimsk invasion i 640 e.v.t., hvorved det genopbyggede bibliotek brændte og dets værker gik tabt for eftertiden. Men selv om aktiviteten fortsatte kom den ikke til at spille nogen rolle for romerne, som aldrig selv optog matematiske sysler der rakte ud over den umiddelbare praktiske nytte for administrative, landmålings- og ingeniørmæssige samt kalendermæssige spørgsmål. Og dér kunne man klare sig med en lidet sofistikeret aritmetik og beregningscentreret geometri. Det kan vi bl.a. se af de - meget få - bøger skrevet af romere, hvori matematik berøres, f.eks. i *Vitruvius*' bog om arkitektur (14 f.v.t.). En anden sådan bog - romernes matematiske hovedværk, hvis det kan kaldes sådan - skyldes *Boethius* (ca. 480-524 e.v.t.), der fremstiller en forkortet udgave af Nichomachos' aritmetik (omtalt ovenfor), og en geometri som præsenterer et afkog af resultater, uden støtte i argumenter, hentet fra de fire første bøger af Euklids "Elementer". Et indtryk af romernes forhold til matematik kan man få af dette citat fra *Cicero* (106-43 f.v.t.):

"Grækerne holdt geometrien i den højeste ære; således gjorde ingenting mere strålende fremskridt hos dem end matematikken. Men vi (min understregning) har sat en grænse for denne kunst i dens nytte for måling og beregning."

Når romerne ikke gik ind i at bringe den græske matematiske tradition videre, var det fordi denne tradition ikke havde meget at tilbyde til fremme af praktiske samfundsmæssige forehavender på den tid, heller ikke i et aktivt og kompliceret samfund som det romerske. Disse forehavender kunne sagtens trives på et aritmetisk og målingsgeometrisk grundlag af ca. den standard som var nået i babylonsk og ærgyptisk matematik suppleret med enkelte bidrag fra den alexandrinske skole. Men i den klassiske græske matematik forblev matematikken en spekulativ beskæftigelse, en del af filosofien. Den var ikke alene ikke skabt for at være af praktisk nytte, den var det heller ikke i oldtiden. En vigtig grund til det var nok at den græske tradition - med Diophantos som en isoleret undtagelse - aldrig udviklede en slagkraftig aritmetik og algebra, fordi de opgav at tage andre end naturlige tal og til nød rationale tal alvorligt. Morris Kline gør boet skarpt op: "Ved at insistere på enhed, fuldstændighed og enkelhed i deres geometri, og ved at adskille spekulativ tankevirksomhed fra nyttehensyn, blev klassisk græsk matematik en begrænset bedrift. Den indsnævrede folks synsfelt og lukkede deres forestillingsverden af over for nye tanker og metoder. Den bar i sig selv kimen til sin død. Begrænsetheden i dens aktionsradius, det eksklusive i dens synspunkt, og de æstetiske krav i den havde måske standset dens udvikling hvis ikke den alexandrinske civilisation havde udvidet den græske matematiks horisont", og - kunne man tilføje - havde gjort det attraktivt for araberne at interessere sig for græsk matematik og dermed bidrage til at bevare dens værker for eftertiden.

Da kristendommen vandt fodfæste i romerriget og blev gjort til statsreligion under Konstantin den Store (262-337 e.v.t.) kom matematikken ikke alene til at lide under manglende interesse fra magthavernes side, men tillige, som også anden uafhængig intellektuel aktivitet, under ideologisk forfølgelse, med henvisning til dens ukristelige natur. En af den alexandrinske skoles sidste matematikere, Hypatia, blev flået af kristne fanatikere i 415, fordi hun nægtede at afsværge sin "græske overbevisning". Den østromerske kejser Justinian lukkede alle græsksindede filosofiske skoler, bl.a. Platons akademi i Athen i 529 e.v.t. Sammen med andre drog en af akademiets sidste matematikere, Simplikios, til Persien og grundlagde et akademi i den græske tradition. Andre græske lærde kom dog til Konstantinopel, hvor nogle fik lejlighed til at udøve en vis matematisk vedligeholdelsesvirksomhed, i form af kommentarskrivning o. lign. Dette er nok én af grundene til at der i byzantinske arkiver blev bevaret udgaver af klassiske græske matematikeres arbejder, navnlig af Archimedes og Apollonios.

At romerne ikke indså hvordan filosofisk grundforskning som klassisk græsk matematik skulle være en fornuftig investering til samfundsmæssige formål fremgår af det ovenfor sagte. Men som antydet ville en sådan investering ikke have haft store chancer for at give afkast i deres egen tidsalder, heller ikke hvis de havde væbnet sig med en god portion tålmodighed. Tilsvarende forholdt det sig i øvrigt med den islamisk-arabiske kultur, som ganske vist interesserede sig meget for matematik, og kendte den klassiske græske tradition særdeles godt, men arbejdede med langt mere praksisrettede sider af matematikken, som vi senere skal se det. Det var først i renæssancens Europa at den særlige kombination af omstændigheder og forudsætninger af matematisk, naturvidenskabelig, teknologisk, ideologisk og samfundsstrukturel art, som kunne bringe en spekulativt præget grundforskning i frugtbar forbindelse med andre typer af virksomhed, kom til at foreligge, med de enorme konsekvenser for verdens gang det fik. Det skal vi komme tilbage til.

Matematisk virksomhed døde altså ud i Europa omkring 5oo e.v.t. for først at blive genoptaget for alvor i middelalderen, nærmere bestemt fra omkring 12-13oo. Ganske vist blev der både i det byzantinske rige og i de vestlige klostre og klosterskoler givet en vis undervisning i indledende matematik, og der blev udført lidt kalenderarbejde, bl.a. af hensyn til beregning af påsken. Disse aktiviteter foregik på grundlag af udvandede kommentarer over tidligere værker, ikke mindst Boethius', og fik alt i alt et meget elementært præg.

MATEMATIKKEN EFTER ANTIKKEN - I KINA, INDIEN OG ISLAMS LANDE

Tidligere i denne tekst er der givet en omtale af matematikkens begyndelse i de orientalske højkulturer, den mesopotamiske, den ægyptiske, kinesiske og indiske. Skal man sige noget fælles og sammenfattende fra stor flyvehøjde om matematikkens fortsættelse i disse lande, og i den fra omkring 600 e.v.t. opdukkende islamisk-arabiske kultur, er det i høj grad det samme som før blev sagt om dens begyndelse: Matematikken tjener i bund og grund det praktiske livs behov (selv om disse sagtens kan føre til interne undersøgelser af rent matematisk art, og selv om nødvendigheden af undervisning i matematik let fører til en vis selvstændiggørelse af den). Aritmetik og algebra står i centrum, og i det omfang geometri behandles er det de målingsmæssige og beregningsmæssige træk ved figurer og legemer fra den fysiske virkelighed der tages op. Man løser opgaver og angiver deres løsning ved regler og procedurer, men anfører kun sjældent argumenter og endnu sjældnere beviser. Logiske problemer tiltrækker ingen interesse, og forskellen mellem eksakte og tilnærmede angivelser erkendes næsten aldrig.

Matematikken i Kina udvikler sig i århundrederne efter vor tidsregnings begyndelse i direkte og rolig forlængelse af den forudgående periodes matematik. Et vidnesbyrd om kontinuiteten i forløbet ser vi i at den gamle, tidligere omtalte, traktat "Ni kapitler..." blev gjort til officiel lærebog ved uddannelsen af statens embedsmænd så sent som i 656 e.v.t.

Beskæftigelsen med matematik har fortsat et mere eller mindre nært udspring i dagliglivets forehavender, i handel, landmåling, bygningsvæsen og kalendervæsen, selv om de problemer der behandles er blevet kaldt (af Boyer) mere pittoreske end praktiske. Behandlingen af stoffet bliver med tiden mere og mere algebraisk i sit præg, også når problemkilden er geometrisk.

Kineserne vendte ofte tilbage til det at angive værdier for π. Tsu Ch'ung-cheih (5. årh. e.v.t.) klemte π inde mellem 3.1415926 og 3.1415927, den bedste tilnærmelse opnået i noget land før det 15. århundrede.

Guldalderen i kinesisk matematik falder i den sene Sung-tid, nærmere bestemt i det 13. århundrede, hvor en særlig algebraisk skole trivedes. Skolens hovedværk "Ssu-yüan yü-chien", "De fire elementers dyrebare spejl", blev skrevet i 13o3 af Chu Shih-chieh som levede af at give matematikundervisning som vandrende lærd. De nævnte fire elementer står for fire ubekendte i en ligning, og værket handler da også hovedsageligt om løsning af ligningssystemer og enkeltligninger, hvoraf nogle er af 14. grad. Det indeholder dog også andet stof. F.eks. angives binomialkoefficienterne - dvs. koefficienterne i en udregning af binomiet $(a+b)^n$ - for $n = 1,\ldots,8$, i en opstilling magen til den som i det 17. århundrede blev anvendt af Pascal - og eftertiden - i "Pascals trekant". Chu løste sine ligninger med en særlig metode som han kaldte fan-fa, og som langt senere er blevet kendt under navnet "Horner's skema". Metoden består i ved skridtvise substitutioner at erstatte den oprindelige ligning med en række af stedse mere håndterlige ligninger, indtil der fremkommer én som kan løses direkte. Ud fra den sidste lignings løsninger kan man så, ved at substituere tilbage igen, opnå løsninger til den oprindelige ligning, eventuelt i tilnærmet form. Det ser ud til at fan-fa-metoden ikke er opfundet af Chu, men er en del ældre. Desuden blev den benyttet af flere af hans samtidige, bl.a. Li Chi, der i "Ts'e-yuan hai-ching", "Cirkelmålingernes hav-spejl", f.eks. behandler 4.gradsligninger opstået af problemer vedrørende ind- og omskrevne cirkler for retvinklede trekanter, nærmere bestemt sammenhængen mellem den betragtede cirkels radius og trekantens sider. En anden samtidig, Ch'in Chiu-shao, har anvendt fan-fa i sit arbejde med ubestemte ligninger.

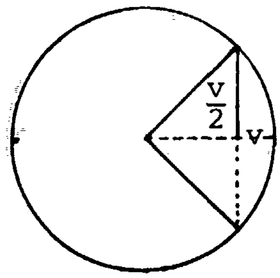
Som nævnt i et tidligere afsnit er det vanskeligt at udrede påvirkningsforholdene ind og ud af kinesisk matematik, især i den senere periode, og navnlig i forhold til Indien, som Kina ofte stod i livlig forbindelse med, bl.a. gennem buddhistiske kanaler. Det forhold at mange af de kinesiske metoder kun kendes fra Kina peger på at væsentlige dele af udviklingen dér er foregået i uafhængighed af andre kulturer. Således opereredes senest i det 13. århundrede, og dermed tidligere end i noget andet land, med decimalbrøker som selvstændige tal, og ikke blot som angivelser i forhold til måleenheder.

Den kinesiske algebra når på sit højdepunkt et stade der ligger over hvad der på samme tid blev præsteret i Europa. Henimod 15oo-tallet stagnerer matematikken i Kina, den kunne ikke rigtig komme videre på det grundlag den havde. Samtidig tog i Europa den udvikling af matematikken fart, som i løbet af få årtier bragte den europæiske matematik, herunder algebraen, størrelsesordner længere frem end det skete i nogen af de forudgående orientalske kulturer.

Efter Sulvasutra-tiden kommer den indiske, hinduiske matematiks blomstringstid til at ligge i perioden 2oo-12oo e.v.t., hvor der, efter alt at dømme under inspiration fra grækere der bragte den alexandrinske matematik til området og måske også fra forbindelser med Kina, skete en matematisk oprustning. Astronomi og astrologi afgav hovedmotiverne for beskæftigelsen, selv om også handelsregning (rente, fordeling mellem partnere osv.) spillede en rolle.

Indernes hovedbidrag lå på talområdet, hvor de indførte et positionelt lo-talssystem med selvstændige tegn for tallene 1,2,3,4, 5,6,7,8,9. Fra omkring 6oo e.v.t. benytter de et tegn for nul, efterhånden ikke blot som hos alexandrinerne til at angive fraværet af et tal på en plads, men som et eget tal, der kan regnes med. Mahavira (9. årh.) angiver regnereglerne nul gange nul er lig nul, og et tal minus nul er lig tallet selv. I øvrigt siger han også at et tal divideret med nul er tallet selv! Problemet division med nul fik hos Bhaskara (12. årh.) den rigtige løsning at et positivt tal divideret med nul giver noget uendeligt stort. Inderne tillod også negative tal - de angav gæld - og regnede med dem. De var dog utilpasse ved at opgive resultater af opgaver ved negative tal. De fire regningsarter for negative tal blev grundlagt af Brahmagupta (7. årh.). Bhaskara opstillede en algebra for irrationale tal - dvs. rodtal, først og fremmest kvadratrødder - der blev behandlet på linje med hele tal uden logiske skrupler. Hinduerne indså at 2.gradsligninger der kan løses typisk har to rødder, eventuelle negative og irrationale medregnet, og behandlede alle typer af 2.gradsligninger under ét, stort set på "vores" måde. Også ubestemte ligninger blev behandlet af de hinduiske matematikere, der heri nåede længere end Diophantos, f.eks. ved at finde samtlige heltalsløsninger til ligningen ax+by = c, hvor a,b og c er hele tal. Symbolsk notation skabt ved forkortelser af ord vandt efterhånden indpas.

Hverken i rent geometrisk henseende eller i trigonometrisk henseende nåede inderne for alvor videre end de alexandrinske grækere. I stedet for som Ptolemaios at studere korder over cirkelbuer, valgte de at betragte halvkorder, altså faktisk sinus til den halve vinkel (de brugte dog ikke ordet sinus, men ordet "jiva"). En tabel over resultaterne af det findes hos <u>Aryabhata</u> (5. årh.).



Den <u>islamiske</u> matematik blomstrede omkring 75o-12oo e.v.t. I løbet af få årtier efter Muhammed (død 632) erobrer muslimerne Mellemøsten til og med det persiske område, Nordafrika og størstedelen af Spanien. Fra omkring 75o var magtforholdene så konsoliderede at der med centrum i Bagdad kunne opstå en betydelig kulturel og videnskabelig udfoldelse. Det var karakteristisk at dette foregik i en sand kulturel og etnisk smeltedigel, hvor hinduer, persere, arabere, grækere, jøder og kristne var aktører. Særlig kalifferne al-Mansur, Harun al-Raschid og al-Mamun (8. og 9. årh.) var ivrige for at fremme den kulturelle og videnskabelige virksomhed. Den sidstnævnte oprettede f.eks. en universitetslignende institution, Visdommens Hus, i Bagdad. Kulturblandingen bevirkede at islamisk matematik blev påvirket fra mange kilder, fra den indiske matematik (navnlig fra Brahmagupta), fra den babylonisk-persiske tradition, og ikke mindst fra det ptolemæiske spor i græsk matematik. Kendskab til grækernes matematik fik araberne bl.a. gennem diplomatiske forbindelser med det byzantinske rige, hvor man fik adgang til klassiske manuskripter. Euklid's "Elementer" og Ptolemaios' "Almagest" blev oversat omkring 8oo.

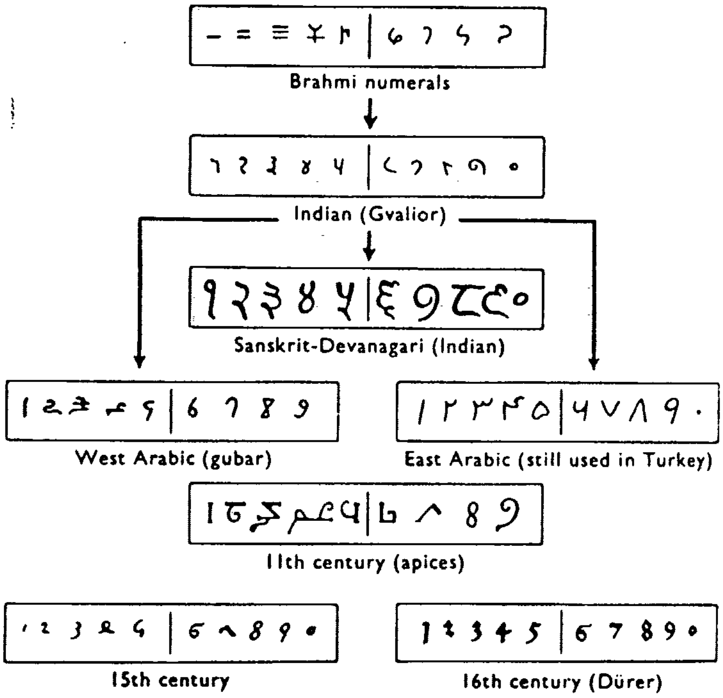
Også arabernes matematik fik et basalt algebraisk præg. Selve ordet "algebra" kommer faktisk af det arabiske "al-jabr", udmøntet af <u>al-Khowarizmi</u> omkring 825. Hans navn er i øvrigt selv gået over i historien gennem det moderne ord "algoritme", der nu betyder en procedure bestående af et sæt af velafgrænsede operationer udført i en bestemt rækkefølge. Ordet "al-jabr" antages at betyde "genopretning". Det der genoprettes er balancen på de to sider af en ligning, når den underkastes forskellige manipulationer. Via muslimerne i Spanien, maurerne, blev "al-jabr" til "algebrista", som betegnede de personer der dyrkede "al-jabr". Med tiden blev så "algebrista" til vort "algebra".

Motivationen for den islamiske algebra var i høj grad praktiske gøremål. F.eks. nævner al-Khowarizmi spørgsmål som deling mellem partnere, handel, landmåling, kanalgravning, geometrisk måling og beregning og arv som emner der kunne nyde godt af en algebraisk behandling. Navnlig arveanliggender synes at have givet ophav til mange problemer på grund af de meget indviklede arveregler i islamisk ret.

Den islamiske algebra benyttede ikke symboler, men var retorisk. Problemerne blev behandlet i eksempelform, ikke i generelle mønstre. Som hos inderne opereredes nogenlunde frit med irrationale tal, mens man veg tilbage for negative tal. Derimod interesserede araberne sig langt mere for argumenter end inderne gjorde. Mange, f.eks. al-Khowarizmi, gav geometriske argumenter af græsk præg som støtte for de ellers rent talmæssige operationer. Nogle udførte ligefrem egentligt syntetiske ræsonnementer á la Euklid og Apollonios. Det gælder f.eks. Omar Khayyam (1050-1123), der løste tredjegradsligninger ved at skære keglesnit, af nogle historikere kaldt det største selvstændige skridt i islamisk algebra.

Når det gælder geometri i den euklidiske tradition tilføjede araberne ikke meget nyt, bortset fra måske at de sloges med Euklid's parallelpostulat som de forsøgte at bevise. Et arbejde af Nasir Eddin al-Tusi (13. årh.) herom kom i oversættelse til at spille en rolle for Saccheri's forarbejde i 1700-tallet til den såkaldte ikke-euklidiske geometri. Ellers indskrænkede araberne sig hovedsagelig til at udarbejde kritiske kommentarer til de klassiske græske tekster og bidrog herved afgørende til disses bevarelse. Som hos inderne var astronomiske og astrologiske studier den vigtigste spore for arabernes beskæftigelse med målingsorienteret geometri og trigonometri. De overtog med tiden hinduernes sinus-synspunkt til afløsning af det ptolemæiske kordesynspunkt. De introducerede tangens og cotangens og behandlede sfærisk trigonometri.

Araberne havde deres kraftige andel i udbredelsen af de indiske taltegn og det positionelle lo-talssystem, i så høj grad at man siden uberettiget har talt om arabertallene. Tallene blev gennem tiderne skrevet på mange forskellige måder, inden de fik den nu gængse form - som for resten ikke benyttes i de arabiske lande!



Der var matematisk aktivitet i gang i den islamiske verden indtil det 15. århundrede, men det gik ned ad bakke fra omkring 12oo, dels på grund af indre ustabilitet i området, dels på grund af svækkelse udefra forårsaget af korstogene og en række krige med mongolerne. Disse rendte til slut Bagdad og kalifatet over ende i 1258.

AFSLUTNING

Lad os forsøge at gøre status over helheden af det matematiske bygningsværk, som blev frembragt af udviklingen fra oldtidssamfundene hen over de orientalske middelaldersamfund frem til tærskelen af den europæiske renæssance, en tærskel som vi for overskuelighedens skyld kan sætte til 13oo.

De samfund hvori matematikken blev skabt i tidsrummet 3ooo f.v.t. til 13oo e.v.t. havde meget forskellige materielle og kulturelle grundlag, om end de selvfølgelig havde mange fællestræk. Nogle samfund var organiseret som bystater stramt styret af en præsteadel. Andre var i kortere eller længere perioder ekspansive storriger med et vidtforgrenet regeringsapparat, der stod i spidsen for store opgaver med opbygning af teknisk og organisatorisk infrastruktur, f.eks. i tilknytning til vedligeholdelse og fremme af landbrugsproduktion, skatteopkrævning, militærvæsen, kalenderkonstruktion, mønt, mål og vægt, bygge- og anlægsvæsen med meget mere, som stillede store krav til teknologisk og administrativ kunnen. I andre, typisk løsere organiserede, samfund var handel det dominerende erhverv, med hvad deraf fulgte for penge- og vareøkonomi, for transportforhold osv. Nogle samfund var stærkt præget af religion eller ideologi, mens andre var tolerante hjemsteder for allehånde opfattelser på disse områder. De fællestræk der på den anden side også var, vedrørte vel især de teknologier (bredt forstået) som samfundene havde til rådighed. Kina indtager dog her en særstilling ved i høj grad at være sin egen. Landbrugsmetoderne, militær udrustning, transportmidler til lands og til vands, håndværksteknikker osv. udviste nok variationer, men det var over de samme grundtemaer, bl.a. i kraft af gensidige påvirkninger skabt af forbindelser mellem samfundene.

På baggrund af de nævnte forskelle er det bemærkelsesværdigt hvor "ens" matematikken i grunden blev i de forskellige samfund i hele det lange betragtede tidsrum, med den klassiske græske matematik som den enestående undtagelse. Det er jævnt hen de samme slags praktiske forhold i erhverv, administration og ideologi som i de forskellige kulturer motiverer matematisk virksomhed. Og det er stort set de samme typer af problemer der bliver behandlet, med metoder der målt efter de store linjer er af samme type. Som omtalt flere gange i det foregående kom der ud af det en matematik, hvor en ret lille klasse af aritmetisk-algebraiske og målings-/beregningsgeometriske opgaver stod i centrum for beskæftigelsen. Metoderne blev valgt efter om de virkede i forhold til øjemedet med den opgave der skulle løses. Retfærdiggørelse af metoderne som rakte ud over effektivitetsbetragtninger sås kun sjældent. Skønt altså af et praktisk samfundsmæssigt udspring var der ikke så sjældent tale om, at matematikken måtte gå i enrum og gå tæt på rent matematiske spørgsmål som lå hinsides hensynet til den umiddelbare nytte, men ikke længere end til en metode var tilvejebragt, en hjælpundersøgelse fuldført, eller hvad der nu var på tale.

Man kan anskue denne form for matematik som en del af de pågældende samfunds teknologi. Den spredtes da også mellem kulturerne som andre typer af teknologi; gode kneb er der altid et marked for. Det er derfor også rimeligt at konkludere at denne matematikudvikling er <u>drevet af behov i samfundenes materielle, organisatoriske og ideologiske liv</u>. Men man kan også med baggrund i den gennemgang af kulturernes matematik der er foretaget i denne tekst fastslå, at <u>disse behov åbenbart heller ikke kunne drive matematikudviklingen længere end til et vist punkt</u>. Det punkt er karakteriseret ved tilstrækkeligt gode tilnærmelser til beregning/måling af geometriske figurer og legemer som forekom i samfundenes liv og på himmmelen, og ved tilstrækkeligt gode eksakte eller tilnærmede svar på ligningsløsningsopgaver af forskellige typer og grader, fortrinsvis mindre end eller lig tre, og sluttelig ved et positionelt talsystem med 10 eller 60 som grundtal, indrettet til også at omfatte decimal- respektive sexagesimalbrøker, og på et tidspunkt udstyret med et nul der også kunne regnes med - og stedvis med et begreb om negative tal.

Dette rejser et spørgsmål. Stopper udviklingen på grund af <u>samfundet</u>? - fordi samfund af de typer der her er tale om er fælles om på den ene side ikke at have behov der kunne tilgodeses med matematik der rækker ud over den omtalte, og om, på den anden side, at hæmme virksomhed der ikke har umiddelbar samfundsmæssig relevans? Eller stopper den på grund af matematikken? - fordi matematik der opstår på den foran beskrevne måde løber ind i barrierer som den ikke selv kan overskride, hvorfor en overskridelse kræver at betragtningsmåder af en helt ny natur inddrages, betragtningsmåder som fører matematikken op i luftlag, hvor der ikke er forbindelse til dagens og vejens gøremål? Dette spørgsmål vil vi senere tage op til behandling i sammenhæng med omtalen af den videnskabelige revolution i renæssancen.

Vi har set at den klassiske græske matematik, "det euklidiske spor", slet ikke falder ind under den netop givne sammenfatning. Den var hverken udsprunget af eller nyttig for materielle, organisatoriske eller praktiske behov af den slags som samfundene samtidig med eller senere havde. Ved at være en gren af filosofien, sådan som den efter min opfattelse må betragtes, i de filosofisk meget aktive græske bystater, og senere i Museion i Alexandria, tjente matematikken naturligvis et intellektuelt, kulturelt behov af betydning for det græske samfund, men der fandtes ikke et kontant udbytte deraf som kunne eksporteres til kredse uden for de intellektuelle cirkler selv, eller til samfund opbygget efter andre principper. Det var altså ikke åndelig indskrænkethed i det omgivende samfund, der forhindrede den klassiske græske matematiks frugter i at blive plukket til gavn for samfundet. Frugterne var simpelthen ikke modne til det formål.

I omtalen af den græske matematik er der forsøgt antydet et par brikker til en forklaring på at den klassiske græske matematik kunne opstå og trives med den karakter den fik. Uanset hvordan dette forhold skal forklares, må man slutte at der skal et enestående sæt af omstændigheder til for at noget sådant kan gå for sig. Er det et tilsvarende sæt af omstændigheder der er virksomt bag opkomsten af matematikrevolutionen i renæssancen, der i henseende til overskridelse af forud uoverstigelige skranker ikke lader grækernes noget efter? Og hvis svaret på det spørgsmål er ja, hvoraf kommer det så at i perioden efter renæssance-boomet indgår matematikken i et samspil med omverdenen, der - i modsætning til hvad der var tilfældet i tiden før 1300

- fik gennemgribende konsekvenser for samfundsudviklingen i nyere og moderne tid, gennem den industrielle og den videnskabeligt-industrielle revolution? Er det samfundene der nu har skiftet karakter, så de kan drive en helt ny matematikudvikling bygget på samfundsmæssige behov? Eller er det matematikken der nu i kraft af interne udviklinger er blevet i stand til at levere noget til samfundet som den ikke kunne levere før, og som omvendt giver matematikken forstærket samfundsmæssig opdrift?

De undersøgelser der har været foretaget i denne tekst har sat os i stand til så nogenlunde at antyde svar på de spørgsmål angående drivkræfterne i matematikkens udvikling i samfundet vi har stillet. Men vi er gennem besvarelsen stødt på nogle nye spørgsmål. Vores næste opgave er at kaste os over dem.

UDVALGT LITTERATUR

W.W. Rouse Ball: A Short Account of the History of Mathematics
New York, 196o, Dover (opr. udgave 1888/93)

Carl B. Boyer: A History of Mathematics
New York, London, Sydney, 1968, Wiley & Sons

John Burnet: Early Greek Philosophy
New York, 1963, Barns & Noble (opr. udgave 193o)

Euclides: The thirteen books of Euclid's elements, translated with introduction and commentary by T.L.Heath, 2nd ed., vols. I-III
New York, 1956, Dover, (opr. udgave 1926)

Benjamin Farrington: Græsk Naturvidenskab
København, 1962, Hans Reitzel, (eng. udgave 1944/49)

Kurt von Fritz: The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum,
Ann.Math., 46 (1945)

Helmuth Gericke: Geschichte des Zahlbegriffs
Mannheim, 197o, Bibliographisches Institut

James Gow: A Short History of Greek Mathematics
New York, 1968, Chelsea Publ.(1 udg. 1884)

Jens Høyrup: Babylonian Algebra from the View-Point of Geometrical Heuristics,
RUC, Institut VII, 1982, preprint

" : Formative Conditions for the Development of Mathematics in Medieval Islam
RUC, Institut VII, 1984, preprint

" : Influences of Institutionalized Mathematics Teaching on the Development and Organisation of Mathematical Thought in the Pre-Modern Period,
Materialien und Studien der IDM Bielefeld, 2o (198o)

" : Investigations of an Early Sumerian Division Problem, ca 25oo BC
Hist. Math. 9 (1982)

A.P Juschkewitsch: Geschichte der Mathematik im Mittelalter
Leipzig, 1964, B.G. Teubner (russisk org.udgave 1961)

Morris Kline: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times
New York, 1972, Oxford University Press

Jørgen Mejer: Filosofferne før Sokrates
København, 1971, Munksgaard

Karl Menninger: Number Words and Number Systems. A Cultural History of Numbers
Cambridge, Mass., 1977, MIT Press, (tysk udg. 1958)

Joseph Needham: Science and Civilisation in China, Vol 3: Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth,
Cambridge, 1972, Cambridge University Press, (opr. udgave 1959)

O. Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity, 2nd. ed.
Copenhagen, 1957

" : Vorgriechische Mathematik
Berlin-Heidelberg-New York, 1969, Springer-Verlag (opr. udgave 1934)

Olaf Pedersen: Matematik og naturbeskrivelse i oldtiden
København, 1975, Akademisk Forlag

Dirk J. Struik: A Concise History of Mathematics, 3rd. rev.ed.
New York, Dover, 1967 (opr. udg. 1948)

" : On Ancient Chinese Mathematics
The Math.Teacher, 6 (1963)

" : Stone Age Mathematics
Sci. Amer., 179 (1948)

Á. Szabó: Anfänge des euklidischen Axiomensystems
Arch.Hist.Exact Sci., 1, 1961

" : The Transformation of Mathematics Into a Deductive Science and the Beginnings of its Foundation on Definitions and Axioms
Scripta Math.,27 (1964)

Ivor Thomas: Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, vols. I-II
Cambridge, Mass., & London, 198o, Harvard University Press and Heinemann (opr. udgave 1939/41)

Kurt Vogel: Byzans, ein Mittler - auch in der Mathematik - zwischen Ost und West
i Beiträge zur Geschichte der Arithmetik von Kurt Vogel (Sammlung)
München, 1978, Minerva Publikation

B.L. van der Waerden: Science Awakening I, 4th ed.
Leyden, 1971, Noordhoff, (opr. udgave 1954)

" : Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik
Math. Annalen, 117 (194o)

<u>H. Wussing</u>: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik
Berlin, 1979, Deutscher Verlag der Wissenschaften

<u>H. Wussing & Wolfgang Arnold</u>: Biographien bedeutender Mathematiker
Berlin 1983, Volk und Wissen

<u>H.G. Zeuthen</u>: Mathematikkens Historie. Oldtiden
Ny revideret udgave ved O. Neugebauer
København, 1949, Høst og Søn (opr. udgave 1896)

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen.

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinøe og Peter H. Lassen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik. — Nr. 3 er a jour ført i marts 1984
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. — Nr. 4 er p.t. udgået.
Mogens Niss.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". — Nr. 5 er p.t. udgået.
Helge Kragh.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". — Nr. 7 er udgået.
B.V. Gnedenko.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's:"Nova Stereometria Doliorum Vinarioum".
Projektrapport af Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen.
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER"
red. Jørgen Larsen

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". — Nr. 12 er udgået
Mogens Brun Heefelt

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of Reference etc. A Bibliography".

Else Høyrup.

Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".

Specialeopgave af Leif S. Striegler.

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".

Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.

Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".

Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings of an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.

Bernhelm Booss & Mogens Niss (eds.).

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".

Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.

Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".

Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.

Vejleder: Jørgen Larsen.

21/79 "KONTROL I GYMNASIET - FORMÅL OG KONSEKVENSER".

Projektrapport af Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.

Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of realitivity".

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE".
1. En analyse. 2. Interviewmateriale.

Projektrapport af Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.

Vejleder: Mogens Niss.

Nr. 24 a+b er p.t. udgået.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.

Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS".

Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".

Projektrapport, speciale i fysik, af Gert Kreinøe.

Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".

Projektrapport af Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".

Oluf Danielsen.

Nr. 30 er udgået.

Udkommer medio 1982 på Fysik-, Matematik- og Kemilærernes forlag.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".

Projektrapport af Troels Lange og Jørgen Karrebæk.

Vejleder: Stig Andur Pedersen.

Nr. 31 er p.t. udgået

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMALINGER OG MOSSBAUEREFFEKTMALINGER".

Projektrapport, speciale i fysik, af Crilles Bacher og Preben Jensen.

Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK-NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".

Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION".

ENERGY SERIES NO.1.

Bent Sørensen.

Nr. 34 er udgået.

Publ. i "Renewable Sources of Energy and the Environment", Tycooli International Press, Dublin, 1981.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".

Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN ?".

Fire artikler.

Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".

ENERGY SERIES NO.2.

Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".

Projektrapport af Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.

Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.

Nr. 38 er p.t. udgået

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".

Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".

Projektrapport af Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.

Vejleder: Per Nørgaard.

Nr. 40 er p.t. udgået

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".

ENERGY SERIES NO.3.

Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".

Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1. "COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".

2. "ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".

ENERGY SERIES NO.4.

Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISK UNDERSØGELSE AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".

Projektrapport af Niels Thor Nielsen.

Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82

46/82 I+II "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDELSE - ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".

Projektrapport af Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.

Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".

ENERGY SERIES NO.5.

Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".

Projektrapport af Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn, Isac Showiki.

Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".

Projektrapport af Preben Nørregaard.

Vejledere: Jørgen Larsen & Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY". ENERGY SERIES NO.6.

Rapport af Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK?"

Projektrapport af Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS"

Bernhelm Booss & Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".

Arne Jakobsen & Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.

Stig Andur Pedersen & Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En bibliografi.
Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82: Se også tekst 62/83.

56/82 "ÉN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET" -
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.

Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af Per Hammershøj Jensen & Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE" - et eksempel.
Projektrapport af Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION", som et eksempel på en naturvidenskab - historisk set.
Projektrapport af Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En bibliografi. 2. rev. udgave
Else Høyrup

63/83 "CREATING ENERGY FUTURES: A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8
David Crossley & Bent Sørensen

64/83 "VON MATHEMATIK UND KRIEG".
Bernhelm Booss og Jens Høyrup

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen, Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss & Klaus Grünbaum

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen

67/83 "ELIPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"

Projektrapport af Lone Biilmann og Lars Boye

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.

Projektrapport af Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid, Frank Mølgård Olsen.

Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK" - en test i 1.g med kommentarer

Albert Chr. Paulsen

70/83 "INDLÆRINGS- OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU"

Projektrapport af Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Age Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.

Vejleder: Klaus Grünbaum & Anders H. Madsen

71/83 "PIGER OG FYSIK" - et problem og en udfordring for skolen?

Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich & Mette Vedelsby

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S. Peirce.

Peder Voetmann Christiansen

73/83 "EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG" - økologisk contra traditionelt

ENERGY SERIES No. 9

Specialeopgave i fysik af Bent Hove Jensen

Vejleder: Bent Sørensen

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik

Projektrapport af Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.

Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM" - Case: Lineær programmering

Projektrapport af Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl, Frank Mølgaard Olsen

Vejledere: Mogens Brun Heefelt & Jens Bjørneboe

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.

ENERGY SERIES No. 10

Af Niels Boye Olsen og Bent Sørensen

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?" Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller

Projektrapport af Svend Age Houmann, Keld Nielsen, Susanne Stender

Vejledere: Jørgen Larsen & Jens Bjørneboe

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM"

Specialerapport af Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant

Vejleder: Niels Boye Olsen

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE"

Projektrapport af Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.

Vejleder: Bernhelm Booss

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B"

Mogens Brun Heefelt

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM"

Specialerapport af Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen

Vejleder: Niels Boye Olsen

82/84 "MATEMATIK- OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND"

Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983

Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY" nr. 83 er p.t. udgået

PEACE RESEARCH SERIES NO. 1

af Bent Sørensen

84/84 " NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".

Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK"

Specialerapport af Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE"

PEACE RESEARCH SERIES NO. 2

af Bent Sørensen

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS"

af Jeppe C. Dyre

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS"

af Detlef Laugwitz

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING"

af Bjarne Lillethorup & Jacob Mørch Pedersen

90/84 "ENERGI I 1.G - en teori for tilrettelæggelse"

af Albert Chr. Paulsen

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET"
1. Lærervejledning

Projektrapport af: Birger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson

Vejleder: Torsten Meyer

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET
2. Materiale

Projektrapport af: Birger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson

Vejleder: Torsten Meyer

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM-NON-LOCALITY"

af Peder Voetmann Christiansen

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden"

Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen

Vejleder: Mogens Niss

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE"

Peace research series no. 3

af Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING"
af Bjarne Lillethorup

Vejleder: Bent Sørensen

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY"

Jeppe C. Dyre

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN"

af Bent Sørensen

99/85 "Der er langt fra Q til R"

Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp
Vejleder: Andur Pedersen

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING"

af Mogens Niss

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM"

af Ganesh Sengupta

102/85 "OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING"

Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender

Vejleder: Klaus Grünbaum

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE & VIDENSKABENS LYSE IDEER"

Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen

Vejleder: Bent Sørensen

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER"

af: Jens Jæger

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AT THE GLASS TRANSITION"

af Tage Christensen

"A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY"

af Jeppe C. Dyre

Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non-Crystalline Materials held in Grenoble July 1985

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES"

af Bent Sørensen

107/85 "ÉN MYG GØR INGEN EPIDEMI"

- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.

Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, Carsten

Holst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen
Vejleder: Jesper Larsen

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
- state and trends -
af Mogens Niss

109/85 "COX I STUDIETIDEN"
- Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Kattler og Torben J. Andreasen
Vejleder: Jørgen Larsen

110/85 " PLANNING FOR SECURITY "
af Bent Sørensen

111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT"
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal
Vejleder: Mogens Niss

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER"
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11"
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski